

УЧЕТ ВЛИЯНИЯ ПОЛЯ ЦЕНТРОБЕЖНЫХ СИЛ И ПОЛЯ ТЕМПЕРАТУР ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ДИНАМИКИ РАБОЧИХ КОЛЕС ГТД

© 2009 Д. П. Давыдов, А. И. Ермаков

Самарский государственный аэрокосмический университет

Для учета влияния поля центробежных сил и неравномерного нагрева диска при исследовании динамики рабочих колес турбомашин с помощью метода волновых динамических жесткостей разработан одномерный осесимметричный изопараметрический дисковый конечный элемент. Разработана и отлажена программа по расчету вращающихся неравномерно нагретых дисков.

Конечный элемент, диск, матрица, усилие, перемещение, сила инерции, поле температур, программа

В рабочих условиях колесо ГТД подвержено воздействию поля вызванных вращением сил инерции и поля температур.

Поле центробежных сил и неравномерный нагрев приводят к возникновению статических напряжений. При колебаниях в процессе смещения системы из положения равновесия статические силы стремятся либо вернуть ее, либо, наоборот, препятствуют возвращению в исходное состояние, увеличивая или уменьшая тем самым жесткость конструкции [1].

Для учета влияния поля центробежных сил и неравномерного нагрева диска при исследовании динамики рабочих колес турбомашин с помощью метода волновых динамических жесткостей разработан одномерный осесимметричный изопараметрический дисковый конечный элемент.

При выводе определяющего уравнения элемента приняты следующие допущения:

- диск симметричный относительно своей срединной плоскости;
- температура диска постоянная по толщине;
- диск находится в плоском осесимметричном напряженном состоянии;
- напряжения постоянные по толщине диска;
- в радиальных и цилиндрических сечениях диска действуют только нормальные напряжения.

Используя соотношения обобщенного закона Гука для плоского осесимметричного напряженного состояния и формулы Коши в цилиндрической системе координат, записаны выражения, связывающие радиальные

N_r и окружные N_φ погонные усилия в диске с перемещениями [2]:

$$N_r = \frac{Eh}{1-\mu^2} \frac{dU}{dr} + \frac{Eh}{1-\mu^2} \mu \frac{U}{r} - \frac{Eh}{1-\mu} \alpha \Delta T, \quad (1)$$

$$N_\varphi = \mu N_r + \frac{Eh}{r} U - Eh \alpha \Delta T, \quad (2)$$

где U – радиальное перемещение; r – радиус; E – модуль упругости материала; μ – коэффициент Пуассона; α – коэффициент линейного расширения; ΔT – температура нагрева.

Для вывода определяющего дифференциального уравнения рассмотрено условие равновесия в радиальном направлении (3) элемента диска, выделенного двумя радиальными плоскостями, расположенными под углом $d\varphi$, и двумя цилиндрическими поверхностями, радиусами r и $r+dr$ (рис. 1).

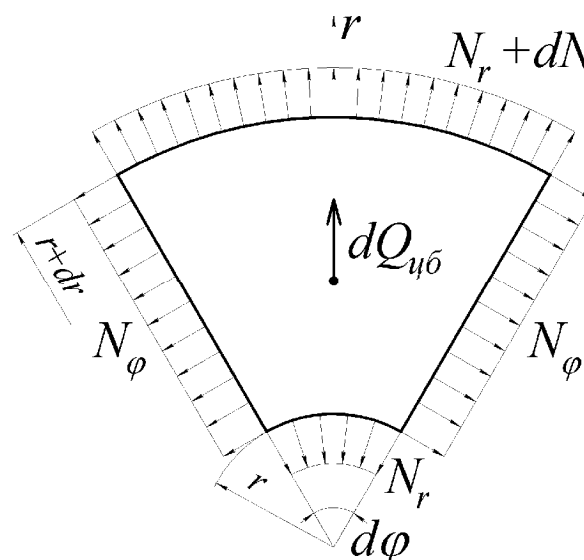


Рис. 1. Нагрузки, действующие на элемент диска

$dQ_{\omega} = \omega^2 r^2 \rho h dr d\varphi$ – центробежная нагрузка, где ρ – массовая плотность материала; ω – окружная скорость вращения.

$$\frac{d(N_r r)}{dr} - N_\varphi + \omega^2 r^2 h = 0. \quad (3)$$

Решая совместно уравнения (1), (2) и (3), получено определяющее дифференциальное уравнение (4), описывающее напряженно-деформированное состояние неравномерно нагретого вращающегося диска:

$$\frac{d(N_r r)}{dr} - \frac{Eh}{1-\mu^2} \frac{U}{r} - \frac{Eh}{1-\mu^2} \mu \frac{dU}{dr} + \frac{Eh}{1-\mu} \alpha \Delta T + \omega^2 r^2 h = 0. \quad (4)$$

Используя полученное уравнение, построен дисковый конечный элемент. При построении системы уравнений элемента применялся метод Галеркина:

$$\int_{r_1}^{r_2} F_j \left(\frac{d(N_r r)}{dr} - \frac{Eh}{1-\mu^2} \frac{U}{r} - \frac{Eh}{1-\mu^2} \mu \frac{dU}{dr} + \frac{Eh}{1-\mu} \alpha \Delta T + \omega^2 r^2 h \right) dr = 0,$$

где r_1, r_2 – границы конечного элемента;

F_j – функции формы ($j = 1, 2$).

Для узлов элемента введены следующие обозначения: узел 1 – принадлежит внутренней границе элемента, узел 2 – внешней, как показано на рис. 2.

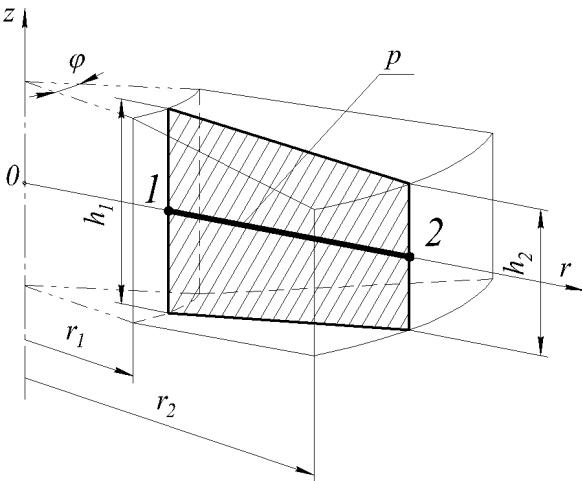


Рис. 2. Обозначение узлов элемента

Построение матрицы формы (5) основано на допущении о линейном изменении упругих смещений по длине элемента

$U(r) = F_1 U_1 + F_2 U_2$, где U_1 – радиальное перемещение первого узла, U_2 – второго.

$$[F] = [F_1, F_2] = \left[\frac{r_2 - r}{\Delta r}, \frac{r - r_1}{\Delta r} \right]. \quad (5)$$

Изменение параметров $h, E, \alpha, \Delta T$ по радиусу элемента принято линейное:

$$h(r) = F_1 h_1 + F_2 h_2, \quad E(r) = F_1 E_1 + F_2 E_2,$$

$$\alpha(r) = F_1 \alpha_1 + F_2 \alpha_2, \quad \Delta T(r) = F_1 \Delta T_1 + F_2 \Delta T_2,$$

где $h_1, E_1, \alpha_1, \Delta T_1$ – параметры диска на внутренней границе элемента, а $h_2, E_2, \alpha_2, \Delta T_2$ – параметры диска на наружной границе элемента.

После интегрирования системы получено матричное уравнение дискового конечного элемента: $\{N^p\} = [K^p] \{q^p\} - \{Q^p\}$,

где $\{N^p\} = \begin{Bmatrix} -N_r^p(r_1^p) \cdot r_1^p \\ N_r^p(r_2^p) \cdot r_2^p \end{Bmatrix}$ – вектор узловых

реакций элемента; $[K^p] = \begin{bmatrix} K_{11}^p & K_{12}^p \\ K_{21}^p & K_{22}^p \end{bmatrix}$ – мат-

рица жесткости элемента; $\{q^p\} = \begin{Bmatrix} U_1^p \\ U_2^p \end{Bmatrix}$ – век-

тор узловых перемещений элемента;

$\{Q^p\} = \begin{Bmatrix} Q_1^p \\ Q_2^p \end{Bmatrix}$ – вектор эквивалентных узло-

вых нагрузок элемента;

$$K_{11}^p = \frac{E_1 h_1 I_1 + (E_1 h_2 + E_2 h_1) I_2 + E_2 h_2 I_3}{(1-\mu^2)(r_2 - r_1)^2} - \frac{2\mu(E_1 h_1 I_4 + (E_1 h_2 + E_2 h_1) I_6 + E_2 h_2 I_8)}{(1-\mu^2)(r_2 - r_1)} + \frac{E_1 h_1 I_{14} + (E_1 h_2 + E_2 h_1) I_{15} + E_2 h_2 I_{16}}{1-\mu^2};$$

$$K_{12}^p = -\frac{E_1 h_1 I_1 + (E_1 h_2 + E_2 h_1) I_2 + E_2 h_2 I_3}{(1-\mu^2)(r_2 - r_1)^2} - \frac{\mu(E_1 h_1 I_6 + (E_1 h_2 + E_2 h_1) I_8 + E_2 h_2 I_5)}{(1-\mu^2)(r_2 - r_1)} + \frac{E_1 h_1 I_{15} + (E_1 h_2 + E_2 h_1) I_{16} + E_2 h_2 I_{17}}{1-\mu^2} + \frac{\mu(E_1 h_1 I_4 + (E_1 h_2 + E_2 h_1) I_6 + E_2 h_2 I_8)}{(1-\mu^2)(r_2 - r_1)};$$

$$K_{22}^p = \frac{E_1 h_1 I_1 + (E_1 h_2 + E_2 h_1) I_2 + E_2 h_2 I_3}{(1-\mu^2)(r_2 - r_1)^2} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2\mu(E_1 h_1 I_6 + (E_1 h_2 + E_2 h_1) I_8 + E_2 h_2 I_5)}{(1 - \mu^2)(r_2 - r_1)} + \\
 & + \frac{E_1 h_1 I_{16} + (E_1 h_2 + E_2 h_1) I_{17} + E_2 h_2 I_{18}}{1 - \mu^2}; \\
 Q_1^p & = \frac{1}{1 - \mu} \left[E_1 h_1 \alpha_1 \Delta T_1 \left(I_{19} - \frac{I_9}{r_2 - r_1} \right) + \right. \\
 & + (E_1 h_1 (\alpha_1 \Delta T_2 + \alpha_2 \Delta T_1) + (E_1 h_2 + E_2 h_1) \alpha_1 \Delta T_1) \times \\
 & \times \left(I_{21} - \frac{I_{11}}{r_2 - r_1} \right) + (E_1 h_1 \alpha_2 \Delta T_2 + (E_1 h_2 + E_2 h_1) \times \\
 & \times (\alpha_1 \Delta T_2 + \alpha_2 \Delta T_1) + E_2 h_2 \alpha_1 \Delta T_1) \left(I_{22} - \frac{I_{13}}{r_2 - r_1} \right) + \\
 & + ((E_1 h_2 + E_2 h_1) \alpha_2 \Delta T_2 + E_2 h_2 (\alpha_1 \Delta T_2 + \alpha_2 \Delta T_1)) \times \\
 & \times \left(I_{23} - \frac{I_{12}}{r_2 - r_1} \right) + E_2 h_2 \alpha_2 \Delta T_2 \left(I_{24} - \frac{I_{10}}{r_2 - r_1} \right) \left. \right] + \\
 & + \omega^2 \rho [h_1 I_{25} + h_2 I_{27}]; \\
 Q_2^p & = \frac{1}{1 - \mu} \left[E_1 h_1 \alpha_1 \Delta T_1 \left(I_{21} + \frac{I_9}{r_2 - r_1} \right) + \right. \\
 & + (E_1 h_1 (\alpha_1 \Delta T_2 + \alpha_2 \Delta T_1) + (E_1 h_2 + E_2 h_1) \alpha_1 \Delta T_1) \times \\
 & \times \left(I_{22} + \frac{I_{11}}{r_2 - r_1} \right) + (E_1 h_1 \alpha_2 \Delta T_2 + (E_1 h_2 + E_2 h_1) \times \\
 & \times (\alpha_1 \Delta T_2 + \alpha_2 \Delta T_1) + E_2 h_2 \alpha_1 \Delta T_1) \left(I_{23} + \frac{I_{13}}{r_2 - r_1} \right) + \\
 & + ((E_1 h_2 + E_2 h_1) \alpha_2 \Delta T_2 + E_2 h_2 (\alpha_1 \Delta T_2 + \alpha_2 \Delta T_1)) \times \\
 & \times \left(I_{24} + \frac{I_{12}}{r_2 - r_1} \right) + E_2 h_2 \alpha_2 \Delta T_2 \left(I_{20} + \frac{I_{10}}{r_2 - r_1} \right) \left. \right] + \\
 & + \omega^2 \rho [h_1 I_{27} + h_2 I_{26}].
 \end{aligned}$$

Матрица жесткости элемента является симметричной.

Для объединения матричных уравнений всех элементов диска рассмотрены условия равновесия и совместности деформации в узловых точках.

Совершив поэлементное объединение, составлено глобальное матричное уравнение жесткости диска (6):

$$\{N\} = [K]\{q\} - \{Q\}, \quad (6)$$

где $[K]$ – глобальная матрица жесткости диска; $\{N\}$ – вектор узловых реакций диска; $\{q\}$ – вектор узловых перемещений диска; $\{Q\}$ – вектор эквивалентных узловых нагрузок диска.

Учитывая граничные условия и условия равновесия для всех узлов, записана разрешающая система уравнений (7):

$$[H] \cdot \{q\} = \{P\}, \quad (7)$$

где $[H]$ – матрица жесткостей конструкции с учетом граничных условий; $\{q\}$ – вектор узловых смещений с учетом граничных условий; $\{P\} = \{Q\} + \{R\}$ – вектор полной узловой нагрузки; $\{R\}$ – вектор внешних узловых сил.

Записанная система (7) представляет собой замкнутую систему из $n + 1$ уравнений относительно $n + 1$ неизвестных U , где n – число элементов диска. Разрешающая система уравнений (7) позволяет определить искомое узловое смещение и затем рассчитать поля деформаций и напряжений в диске.

Для оценки корректности принятых допущений при выводе уравнений элемента проведены сравнительные расчетные исследования. Для этого на алгоритмическом языке программирования Фортран создана программа по расчету вращающихся неравномерно нагретых дисков с помощью разработанного конечного элемента.

Рассчитаны две конструкции дисков: постоянной толщины и конический диск. Их размеры представлены на рис. 3.

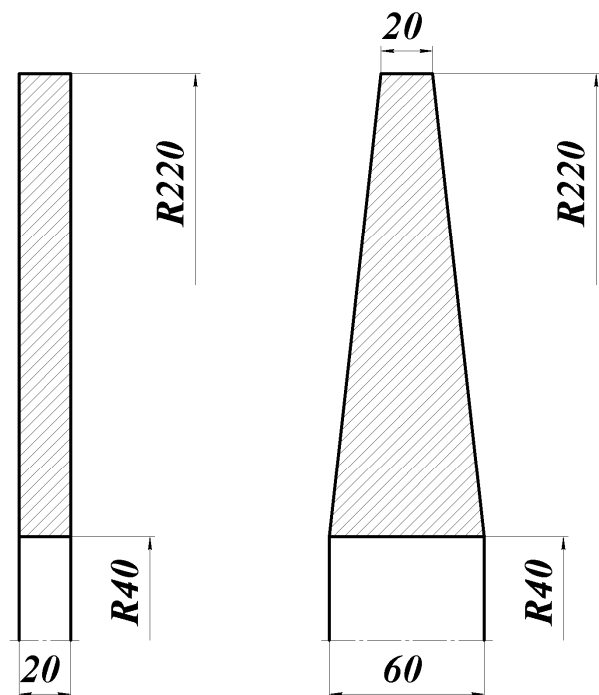


Рис. 3. Исследуемые диски

Сечение каждого диска в радиальном направлении разбито на сорок конечных элементов. Приняты следующие свойства материала:

$$E(r) = 2,0 \cdot 10^{11} \dots 1,6 \cdot 10^{11} \text{ Па};$$

$\alpha(r) = 1,6 \cdot 10^{-5} \dots 1,8 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{К}}$ – изменяются линейно по радиусу диска; $\mu = 0,3$;

$$\rho = 7800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

В расчетах использованы граничные условия свободного (незакрепленного) диска.

Нагружение производилось угловой скоростью $\omega = 2000 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ и линейным градиентом температуры $\Delta T(r) = 200 \dots 400 \text{ К}$.

Для сравнения результатов расчетов проведены аналогичные расчеты дисков в системе конечно-элементного анализа ANSYS. В среде ANSYS для моделирования дисков использованы следующие конечные элементы:

- а) осесимметричная оболочка – Shell51;
- б) плоский осесимметричный – Plane42;
- в) трехмерный – Solid45.

Результаты расчетов в срединной плоскости диска постоянной толщины представлены на рис. 4 и 5.



Рис. 4. Распределение радиальных перемещений по радиусу диска

Результаты расчетов в срединной плоскости конического диска представлены на рис. 6 и 7.

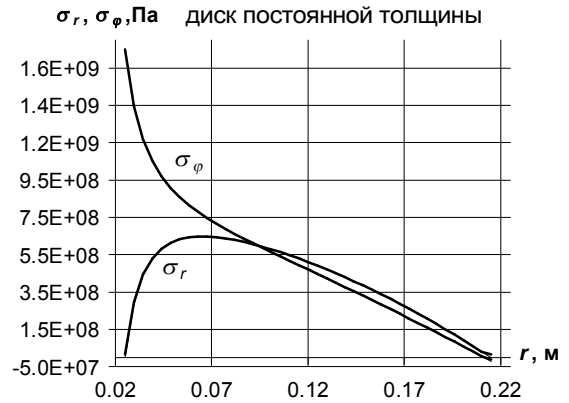


Рис. 5. Распределение радиальных и окружных напряжений по радиусу диска

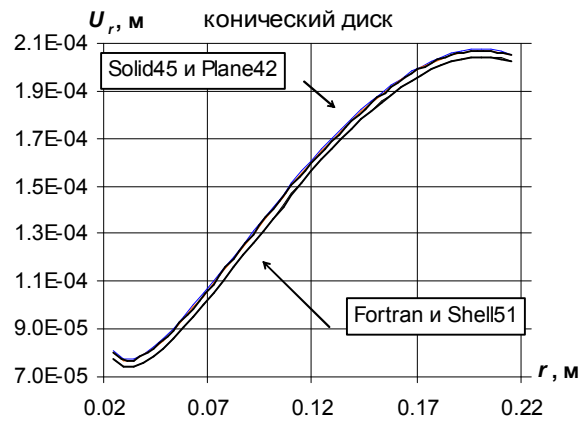


Рис. 6. Распределение радиальных перемещений по радиусу диска

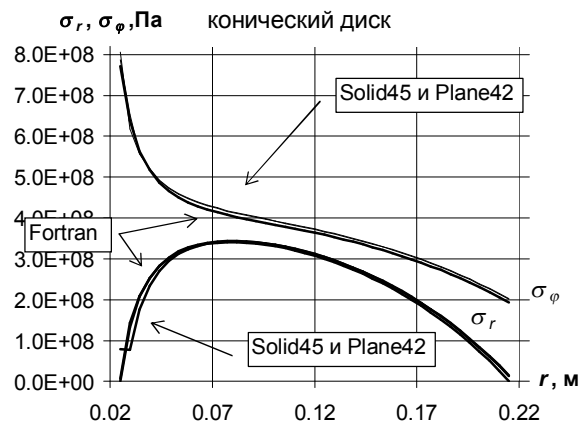


Рис. 7. Распределение радиальных и окружных напряжений по радиусу диска

Анализируя полученные данные, проведена оценка сходимости результатов, полученных при выполнении расчетов с помощью разработанной программы и ANSYS, которая показала, что наибольшее расхождение Δ не превышает пяти процентов (табл. 1). Из чего сделан вывод о корректности полученных уравнений элемента.

Таблица 1 - Сравнение результатов

		Расхождение Δ , %		
		Shell 51	Plane 42	Solid 45
Диск постоянной толщины	U_r	0,07	0,21	0,19
	σ_r	0,23	0,35	0,31
	σ_ϕ	0,18	0,61	0,54
Конический диск	U_r	0,08	3,09	2,44
	σ_r	0,75	4,25	1,64
	σ_ϕ	0,88	2,46	1,89

Кроме того, разработанный конечный элемент точнее рассчитывает напряженно-деформированное состояние диска в зонах центрального отверстия и периферии, чем Ansys. Это связано с тем, что в его основе лежит дифференциальное уравнение, описывающее напряженно-деформированное состояние диска.

Итак, создан одномерный осесимметричный изопараметрический дисковый конечный элемент, на базе него разработана и отлажена программа по расчету вращающихся неравномерно нагретых дисков. Основным преимуществом разработанного конечного элемента является отсутствие численного интегрирования в его матричном уравнении, все интегралы взяты аналитически, то есть заменены алгебраическими выражениями, что существенно снижает машинное время расчета. Также на снижение времени влияет одномерность элемента, так

как интегрирование ведется только по его длине.

Разработанный дисковый конечный элемент позволяет учитывать влияние поля центробежных сил и неравномерного нагрева диска при исследовании динамики рабочих колес ГТД с помощью дискового волнового конечного элемента.

Библиографический список

1. Ермаков, А.И. Построение дискового волнового конечного элемента на базе аналитического решения динамической задачи теории упругости для цилиндра /А.И. Ермаков // Проблемы и перспективы развития двигателестроения. Вестник СГАУ. – Самара: Изд-во СГАУ, 2000. – Вып. 4. - Ч. 2. – С.73-80.

2. Ермаков, А.И. Объемная динамическая модель диска // Проблемы и перспективы развития двигателестроения А.И.Ермаков // Вестник СГАУ. – Самара: Изд-во СГАУ, 2000. – Вып. 4. - Ч. 2. – С.60-73.

References

1. Ermakov A.I. Disk harmonic finite element development // Problems and perspectives of propulsion engineering development. SSAU bulletin: symposium / Samara: publishing house SSAU, 2000. –Rel. 4. – P. 73-80.

2. Ermakov A.I. Solid dynamic disk model // Problems and perspectives of propulsion engineering development. SSAU bulletin: symposium / Samara: publishing house SSAU, 2000. – Rel. 4. – P. 60-73.

CENTRIFUGAL FORCE FIELD EFFECT CONSIDERATION IN DYNAMICS INVESTIGATION OF BLADE WHEELS

© 2009 D. P. Davydov, A. I. Ermakov

Samara State Aerospace University

The disk finite element was developed for structural analysis of rotating nonuniform heated disks from the gas turbine engines. FORTRAN code program was developed for structural analysis of rotating nonuniform heated disks from the gas turbine engines.

Finite element, disk, matrix, force, displacement, centrifugal force, temperature field, program

Информация об авторах

Давыдов Данила Петрович, ассистент кафедры Конструкции и проектирования двигателей летательных аппаратов Самарского государственного аэрокосмического университе-

та. Тел. (846) 267-46-83. E-mail: davydov-ssau@yandex.ru. Область научных интересов: динамика и прочность ГТД.

Ермаков Александр Иванович, доктор технических наук, профессор кафедры Конструкции и проектирования двигателей летательных аппаратов Самарского государственного аэрокосмического университета. Тел. (846) 334-79-22. E-mail: fdla@ssau.ru. Область научных интересов: динамика и прочность ГТД.

Davydov Danila Petrovich, assistant of Aerospace Engines Design Department of Samara State Aerospace University. Phone: (846) 267-46-83. E-mail: davydov-ssau@yandex.ru. Area of research: dynamics and strength of gas turbine engines.

Ermakov Alexander Ivanovich, Doctor of Engineering Science, professor of Aerospace Engines Design Department of Samara State Aerospace University. Phone: (846) 334-79-22. E-mail: fdla@ssau.ru. Area of research: dynamics and strength of gas turbine engines.