

ДИСКОВЫЙ ВОЛНОВОЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ

© 2009 Д. П. Давыдов, А. И. Ермаков

Самарский государственный аэрокосмический университет

Для исследования динамических характеристик рабочих колес ГТД разработан дисковый волновой конечный элемент, представляющий собой кольцевую пластину переменной толщины. С использованием разработанного конечного элемента на алгоритмическом языке программирования Фортран создана программа по расчету собственных частот и форм колебаний вращающихся неравномерно нагретых дисков. Проведены расчетные и экспериментальные исследования собственных частот колебаний дисков.

Волновой конечный элемент, диск, матрица, собственная частота, комплексная форма, усилие, перемещение

Для расчета колебаний рабочих колес ГТД разработан дисковый волновой конечный элемент, представляющий собой кольцевую пластину переменной толщины.

В целях достижения высокой точности динамика кольцевой пластины рассмотрена в рамках гипотез модели Тимошенко. Податливость пластины в своей плоскости не учитывалась.

Для кольцевой пластины получены соотношения, связывающие усилия и перемещения в цилиндрической системе координат $ox\varphi z$ [1]:

$$N_{x\varphi} = \frac{Eh}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial U}{x\partial\varphi} - \frac{V}{x} + \frac{\partial V}{\partial x} \right), \quad (1)$$

$$N_{z\varphi} = \frac{k^2 Eh}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial W}{x\partial\varphi} + \alpha_x \right), \quad (2)$$

$$N_{zx} = \frac{k^2 Eh}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial W}{\partial x} - \alpha_y \right), \quad (3)$$

$$H_x = D \left(\frac{\partial \alpha_x}{x\partial\varphi} - \frac{\alpha_y}{x} - \mu \frac{\partial \alpha_y}{\partial x} \right), \quad (4)$$

$$H_y = D \left(\frac{\partial \alpha_y}{\partial x} - \frac{\mu}{x} \frac{\partial \alpha_x}{\partial\varphi} + \frac{\mu}{x} \alpha_y \right), \quad (5)$$

$$H_{x\varphi} = \frac{D(1-\mu)}{2} \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial x} - \frac{\alpha_x}{x} - \frac{\partial \alpha_y}{x\partial\varphi} \right). \quad (6)$$

Рассмотрены условия равновесия элемента пластины (7-9). На рис. 1. показаны действующие на него динамические усилия и статические силы N_x^{cm} и N_y^{cm} . Наличие последних связано с неравномерным по длине нагревом пластины и ее вращением. В процессе колебаний статические силы оста-

ются постоянными как по величине, так и по направлению.

$$\frac{\partial(N_{zx}x)}{\partial x} + \frac{\partial N_{z\varphi}}{\partial\varphi} - xh\rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial(H_{x\varphi}x)}{\partial x} - H_{x\varphi} + \frac{\partial H_x}{\partial\varphi} - N_{z\varphi}x - N_y^{cm}x\alpha_x - \frac{h^3x}{12}\rho \frac{\partial^2 \alpha_x}{\partial t^2} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial(H_yx)}{\partial x} + N_{zx}x + H_x + \frac{\partial(H_{\varphi x}x)}{x\partial\varphi} - N_x^{cm}x\alpha_y - \frac{h^3x}{12}\rho \frac{\partial^2 \alpha_y}{\partial t^2} = 0. \quad (9)$$

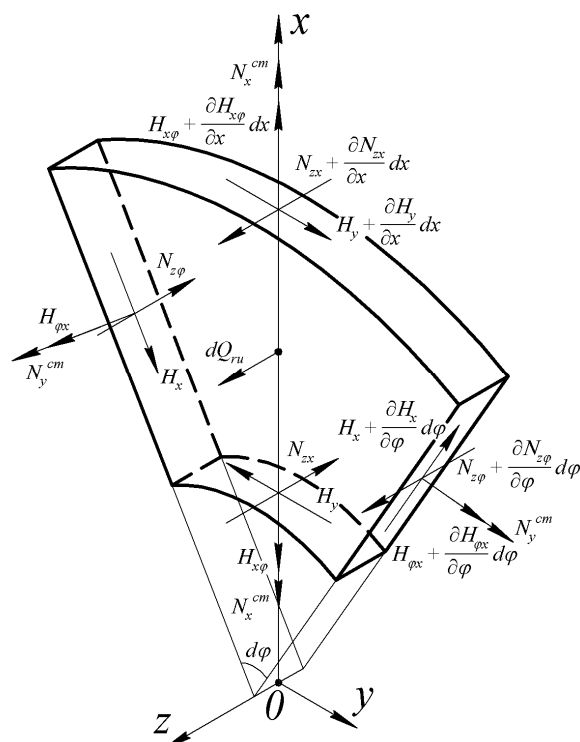


Рис. 1. Кольцевой элемент пластины

В соответствии с [1] усилия и перемещения представлены в комплексной форме в виде волн: $N_{zx} = Q_z e^{im\varphi} e^{ipt}$;

$$H_{x\varphi} = M_x e^{im\varphi} e^{ipt}, \quad H_y = M_y e^{im\varphi} e^{ipt};$$

$$W = q_z e^{im\varphi} e^{ipt}, \quad \alpha_x = \beta_x e^{im\varphi} e^{ipt}, \quad \alpha_y = \beta_y e^{im\varphi} e^{ipt},$$

где $Q_z, M_x, M_y, q_z, \beta_x, \beta_y$ – амплитуды волн.

Совместное решение приведенных выше уравнений, позволило получить определяющую систему дифференциальных уравнений, описывающую колебания кольцевой пластины в рамках гипотез Тимошенко. Она описывает динамику диска в глобальной системе координат и выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \frac{dQ_z}{dx} \\ \frac{dM_y}{dx} \\ \frac{dM_x}{dx} \end{pmatrix} = [A] \begin{pmatrix} q_z \\ \beta_y \\ \beta_x \end{pmatrix} + [B] \begin{pmatrix} \frac{dq_z}{dx} \\ \frac{d\beta_y}{dx} \\ \frac{d\beta_x}{dx} \end{pmatrix}, \quad \text{где}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}; \quad [B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix};$$

$$a_{11} = \frac{m^2}{x} \frac{k^2 E h}{2(1+\mu)} - h \rho p^2 x; \quad a_{13} = -im \frac{k^2 E h}{2(1+\mu)};$$

$$a_{22} = \frac{D}{x} + \frac{m^2}{x} \frac{D(1-\mu)}{2} + N_x^{cm} x + \frac{k^2 E h}{2(1+\mu)} x -$$

$$-\frac{h^3 x}{12} \rho p^2; \quad a_{23} = -i \frac{m}{2x} D(3-\mu);$$

$$a_{31} = im \frac{k^2 E h}{2(1+\mu)}; \quad a_{32} = im \frac{1}{2} D(3-\mu);$$

$$a_{33} = \frac{m^2}{x} D + \frac{D(1-\mu)}{2x} + \frac{k^2 E h}{2(1+\mu)} x + N_y^{cm} x -$$

$$-\frac{h^3 x}{12} \rho p^2; \quad b_{21} = -\frac{k^2 E h}{2(1+\mu)} x; \quad b_{22} = \mu D;$$

$$b_{23} = im \frac{1}{2} D(1-\mu); \quad b_{32} = im \mu D;$$

$$b_{33} = -\frac{1}{2} D(1-\mu).$$

Используя полученную систему уравнений, построен дисковый волновой конечный элемент. При построении системы

уравнений элемента применялся метод Галеркина:

$$\int_{x_1}^{x_2} F_j \begin{pmatrix} \frac{dQ_z}{dx} \\ \frac{dM_y}{dx} \\ \frac{dM_x}{dx} \end{pmatrix} dx = \int_{x_1}^{x_2} F_j \left([A] \begin{pmatrix} q_z \\ \beta_y \\ \beta_x \end{pmatrix} + [B] \begin{pmatrix} \frac{dq_z}{dx} \\ \frac{d\beta_y}{dx} \\ \frac{d\beta_x}{dx} \end{pmatrix} \right) dx,$$

x_1, x_2 – границы конечного элемента; F_j – функции формы ($j = 1, 2$).

Построение матрицы формы (10) основано на допущении о линейном изменении упругих смещений по длине элемента.

$$[F] = [F_1, F_2] = \left[\frac{x_2 - x}{\Delta x}, \frac{x - x_1}{\Delta x} \right]. \quad (10)$$

После интегрирования системы получено матричное уравнение волновых динамических жесткостей (11) дискового конечного элемента в аналитическом виде.

$$\{Q\} = [H] \{q\}. \quad (11)$$

$[H]$ – матрица комплексных волновых динамических жесткостей, устанавливающая связь между комплексными амплитудами волн реакций $\{Q\}$, возникающих на границах элемента и комплексными амплитудами волн перемещений $\{q\}$ этих границ. Коэффициенты матрицы $[H]$ являются функциями от частоты колебаний рабочего колеса p : $[H] = [D] - p^2 [M]$.

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{11} & \dots & D_{16} \\ \dots & \dots & \dots \\ D_{61} & \dots & D_{66} \end{bmatrix} \quad - \quad \text{комплексная}$$

матрица статических жесткостей элемента, где

$$D_{11} = \frac{k^2}{2\Delta r^2(1+\mu)} (E_1 h_1 I_1 + (E_1 h_2 + E_2 h_1) I_2 +$$

$$+ E_2 h_2 I_3) + \frac{m^2 k^2}{2(1+\mu)} (E_1 h_1 I_{14} + (E_1 h_2 + E_2 h_1) I_{15} + E_2 h_2 I_{16});$$

$$D_{12} = \frac{k^2}{2\Delta r(1+\mu)} (E_1 h_1 I_{33} + (E_1 h_2 + E_2 h_1) I_{31} + E_2 h_2 I_{32});$$

$$D_{13} = -i \frac{mk^2}{2(1+\mu)} (E_1 h_1 I_{35} + (E_1 h_2 + E_2 h_1) I_{28} +$$

$$\begin{aligned}
 &+ E_2 h_2 I_{30}); \\
 D_{14} &= \frac{-k^2}{2\Delta r^2(1+\mu)}(E_1 h_1 I_1 + (E_1 h_2 + E_2 h_1) I_2 + \\
 &+ E_2 h_2 I_3) + \frac{m^2 k^2}{2(1+\mu)}(E_1 h_1 I_{15} + (E_1 h_2 + E_2 h_1) I_{16} + \\
 &+ E_2 h_2 I_{17}); \\
 D_{15} &= \frac{k^2}{2\Delta r(1+\mu)}(E_1 h_1 I_{31} + (E_1 h_2 + E_2 h_1) I_{32} + \\
 &+ E_2 h_2 I_{34}); \\
 D_{16} &= -i \frac{mk^2}{2(1+\mu)}(E_1 h_1 I_{28} + (E_1 h_2 + E_2 h_1) I_{30} + \\
 &+ E_2 h_2 I_{29}); \\
 D_{22} &= \frac{1}{12\Delta r(1-\mu^2)} \left(E_1 h_1^3 \left(\frac{I_9}{\Delta r} - 2\mu I_{19} + \Delta r I_{37} \times \right. \right. \\
 &\times \left. \left(1 + \frac{m^2(1-\mu)}{2} \right) \right) + h_1^2 (3E_1 h_2 + E_2 h_1) \left(\frac{I_{11}}{\Delta r} - \right. \\
 &- 2\mu I_{21} + \Delta r I_{38} \left(1 + \frac{m^2(1-\mu)}{2} \right) \left. \right) + 3h_1 h_2 (E_1 h_2 + \\
 &+ E_2 h_1) \left(\frac{I_{13}}{\Delta r} - 2\mu I_{22} + \Delta r I_{39} \left(1 + \frac{m^2(1-\mu)}{2} \right) \right) + \\
 &+ h_2^2 (E_1 h_2 + 3E_2 h_1) \left(\frac{I_{12}}{\Delta r} - 2\mu I_{23} + \Delta r I_{40} \left(1 + \right. \right. \\
 &\left. \left. + \frac{m^2(1-\mu)}{2} \right) \right) + E_2 h_2^3 \left(\frac{I_{10}}{\Delta r} - 2\mu I_{24} + \Delta r I_{42} \left(1 + \right. \right. \\
 &\left. \left. + \frac{m^2(1-\mu)}{2} \right) \right) \left. \right) + \frac{k^2}{2(1+\mu)} (E_1 h_1 I_9 + (E_1 h_2 + \\
 &+ E_2 h_1) I_{11} + E_2 h_2 I_{13}) + N_{x1}^{cm} I_{33} + N_{x2}^{cm} I_{31}; \\
 D_{23} &= -i \frac{m}{24\Delta r(1-\mu^2)} (E_1 h_1^3 ((1-3\mu) I_{19} + \\
 &+ \Delta r (3-\mu) I_{37}) + h_1^2 (3E_1 h_2 + E_2 h_1) ((1-3\mu) I_{21} + \\
 &+ \Delta r (3-\mu) I_{38}) + 3h_1 h_2 (E_1 h_2 + E_2 h_1) ((1-3\mu) \times \\
 &\times I_{22} + \Delta r (3-\mu) I_{39}) + h_2^2 (E_1 h_2 + 3E_2 h_1) ((1- \\
 &- 3\mu) I_{23} + \Delta r (3-\mu) I_{40}) + E_2 h_2^3 ((1-3\mu) I_{24} + \\
 &+ \Delta r (3-\mu) I_{42})); \\
 D_{24} &= \frac{-k^2}{2\Delta r(1+\mu)} (E_1 h_1 I_{33} + (E_1 h_2 + E_2 h_1) I_{31} + \\
 &+ E_2 h_2 I_{32});
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{25} &= \frac{1}{12\Delta r(1-\mu^2)} \left(E_1 h_1^3 \left(\frac{-I_9}{\Delta r} - (I_{21} - I_{19}) \mu + \right. \right. \\
 &+ \Delta r I_{38} \left(1 + \frac{m^2(1-\mu)}{2} \right) \left. \right) + h_1^2 (3E_1 h_2 + E_2 h_1) \times \\
 &\times \left(\frac{-I_{11}}{\Delta r} - (I_{22} - I_{21}) \mu + \Delta r I_{39} \left(1 + \frac{m^2(1-\mu)}{2} \right) \right) + \\
 &+ 3h_1 h_2 (E_1 h_2 + E_2 h_1) \left(\frac{-I_{13}}{\Delta r} - (I_{23} - I_{22}) \mu + \Delta r \times \right. \\
 &\times I_{40} \left(1 + \frac{m^2(1-\mu)}{2} \right) \left. \right) + h_2^2 (E_1 h_2 + 3E_2 h_1) \times \\
 &\times \left(\frac{-I_{12}}{\Delta r} - (I_{24} - I_{23}) \mu + \Delta r I_{42} \left(1 + \frac{m^2(1-\mu)}{2} \right) \right) + \\
 &+ E_2 h_2^3 \left(\frac{-I_{10}}{\Delta r} - (I_{20} - I_{24}) \mu + \Delta r I_{43} \left(1 + \right. \right. \\
 &\left. \left. + \frac{m^2(1-\mu)}{2} \right) \right) \left. \right) + \frac{k^2}{2(1+\mu)} (E_1 h_1 I_{11} + (E_1 h_2 + \\
 &+ E_2 h_1) I_{13} + E_2 h_2 I_{12}) + N_{x1}^{cm} I_{31} + N_{x2}^{cm} I_{32}; \\
 D_{26} &= i \frac{m}{24\Delta r(1-\mu^2)} (E_1 h_1^3 ((1-\mu) I_{19} + 2\mu I_{21} - \\
 &- \Delta r (3-\mu) I_{38}) + h_1^2 (3E_1 h_2 + E_2 h_1) ((1-\mu) I_{21} + \\
 &+ 2\mu I_{22} - \Delta r (3-\mu) I_{39}) + 3h_1 h_2 (E_1 h_2 + E_2 h_1) \times \\
 &\times ((1-\mu) I_{22} + 2\mu I_{23} - \Delta r (3-\mu) I_{40}) + h_2^2 (E_1 h_2 + \\
 &+ 3E_2 h_1) ((1-\mu) I_{23} + 2\mu I_{24} - \Delta r (3-\mu) I_{42}) + \\
 &+ E_2 h_2^3 ((1-\mu) I_{24} + 2\mu I_{20} - \Delta r (3-\mu) I_{43})); \\
 D_{33} &= \frac{1}{24\Delta r(1+\mu)} \left(E_1 h_1^3 \left(\frac{I_9}{\Delta r} + 2I_{19} + I_{37} \Delta r \times \right. \right. \\
 &\left. \left. \right) \right) \\
 D_{34} &= i \frac{mk^2}{2(1+\mu)} (E_1 h_1 I_{28} + (E_1 h_2 + E_2 h_1) I_{30} + \\
 &+ E_2 h_2 I_{29}); \\
 D_{35} &= i \frac{m}{24\Delta r(1-\mu^2)} (E_1 h_1^3 ((1-\mu) I_{21} + 2\mu I_{19} + \\
 &+ \Delta r (3-\mu) I_{38}) + h_1^2 (3E_1 h_2 + E_2 h_1) ((1-\mu) I_{22} + \\
 &+ 2\mu I_{21} + \Delta r (3-\mu) I_{39}) + 3h_1 h_2 (E_1 h_2 + E_2 h_1) \times \\
 &\times ((1-\mu) I_{23} + 2\mu I_{22} + \Delta r (3-\mu) I_{40}) + h_2^2 (E_1 h_2 + \\
 &+ 3E_2 h_1) ((1-\mu) I_{24} + 2\mu I_{23} + \Delta r (3-\mu) I_{42}) + \\
 &+ E_2 h_2^3 ((1-\mu) I_{20} + 2\mu I_{24} + \Delta r (3-\mu) I_{43}));
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{36} = & \frac{1}{24\Delta r(1+\mu)} \left(E_1 h_1^3 \left(\frac{-I_9}{\Delta r} + I_{21} - I_{19} + I_{38} \times \right. \right. \\
 & \times \Delta r \left(1 + \frac{2m^2}{1-\mu} \right) \left. \right) + h_1^2 (3E_1 h_2 + E_2 h_1) \left(\frac{-I_{11}}{\Delta r} + \right. \\
 & + I_{22} - I_{21} + I_{39} \Delta r \left(1 + \frac{2m^2}{1-\mu} \right) \left. \right) + 3h_1 h_2 (E_1 h_2 + \\
 & + E_2 h_1) \left(\frac{-I_{13}}{\Delta r} + I_{23} - I_{22} + I_{40} \Delta r \left(1 + \frac{2m^2}{1-\mu} \right) \right) + \\
 & + h_2^2 (E_1 h_2 + 3E_2 h_1) \left(\frac{-I_{12}}{\Delta r} + I_{24} - I_{23} + I_{42} \Delta r \left(1 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{2m^2}{1-\mu} \right) \right) + E_2 h_2^3 \left(\frac{-I_{10}}{\Delta r} + I_{20} - I_{24} + I_{43} \Delta r \left(1 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{2m^2}{1-\mu} \right) \right) \left. \right) + \frac{k^2}{2(1+\mu)} (E_1 h_1 I_{11} + (E_1 h_2 + E_2 h_1) \times \\
 & \times I_{13} + E_2 h_2 I_{12}) + N_{y1}^{cm} I_{31} + N_{y2}^{cm} I_{32}; \\
 D_{44} = & \frac{k^2}{2\Delta r^2(1+\mu)} (E_1 h_1 I_1 + (E_1 h_2 + E_2 h_1) I_2 + \\
 & + E_2 h_2 I_3) + \frac{m^2 k^2}{2(1+\mu)} (E_1 h_1 I_{16} + (E_1 h_2 + E_2 h_1) \times \\
 & \times I_{17} + E_2 h_2 I_{18}); \\
 D_{45} = & \frac{-k^2}{2\Delta r(1+\mu)} (E_1 h_1 I_{31} + (E_1 h_2 + E_2 h_1) I_{32} + \\
 & + E_2 h_2 I_{34}); \\
 D_{46} = & -i \frac{mk^2}{2(1+\mu)} (E_1 h_1 I_{30} + (E_1 h_2 + E_2 h_1) I_{29} + \\
 & + E_2 h_2 I_{36}); \\
 D_{55} = & \frac{1}{12\Delta r(1-\mu^2)} \left(E_1 h_1^3 \left(\frac{I_9}{\Delta r} + 2\mu I_{21} + \right. \right. \\
 & + \Delta r I_{39} \left(1 + \frac{m^2(1-\mu)}{2} \right) \left. \right) + h_1^2 (3E_1 h_2 + E_2 h_1) \times \\
 & \times \left(\frac{I_{11}}{\Delta r} + 2\mu I_{22} + \Delta r I_{40} \left(1 + \frac{m^2(1-\mu)}{2} \right) \right) + \\
 & + 3h_1 h_2 (E_1 h_2 + E_2 h_1) \left(\frac{I_{13}}{\Delta r} + 2\mu I_{23} + \Delta r \times \right. \\
 & \times I_{42} \left(1 + \frac{m^2(1-\mu)}{2} \right) \left. \right) + h_2^2 (E_1 h_2 + 3E_2 h_1) \times \\
 & \times \left(\frac{I_{12}}{\Delta r} + 2\mu I_{24} + \Delta r I_{43} \left(1 + \frac{m^2(1-\mu)}{2} \right) \right) +
 \end{aligned}$$

$$+ E_2 h_2^3 \left(\frac{I_{10}}{\Delta r} + 2\mu I_{20} + \Delta r I_{41} \left(1 + \frac{m^2(1-\mu)}{2} \right) \right) \left. \right) +$$

$$+ \frac{k^2}{2(1+\mu)} (E_1 h_1 I_{13} + (E_1 h_2 + E_2 h_1) I_{12} + \\
 + E_2 h_2 I_{10}) + N_{x1}^{cm} I_{32} + N_{x2}^{cm} I_{34};$$

$$\begin{aligned}
 D_{56} = & i \frac{m}{24\Delta r(1-\mu^2)} (E_1 h_1^3 ((1-3\mu)I_{21} - \\
 & - \Delta r(3-\mu)I_{39}) + h_1^2 (3E_1 h_2 + E_2 h_1)((1-3\mu)I_{22} - \\
 & - \Delta r(3-\mu)I_{40}) + 3h_1 h_2 (E_1 h_2 + E_2 h_1) \times \\
 & \times ((1-3\mu)I_{23} - \Delta r(3-\mu)I_{42}) + h_2^2 (E_1 h_2 + \\
 & + 3E_2 h_1)((1-3\mu)I_{24} - \Delta r(3-\mu)I_{43}) + \\
 & + E_2 h_2^3 ((1-3\mu)I_{20} - \Delta r(3-\mu)I_{41}));
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{66} = & \frac{1}{24\Delta r(1+\mu)} \left(E_1 h_1^3 \left(\frac{I_9}{\Delta r} - 2I_{21} + I_{39} \times \right. \right. \\
 & \times \Delta r \left(1 + \frac{2m^2}{1-\mu} \right) \left. \right) + h_1^2 (3E_1 h_2 + E_2 h_1) \left(\frac{I_{11}}{\Delta r} - \right. \\
 & - 2I_{22} + I_{40} \Delta r \left(1 + \frac{2m^2}{1-\mu} \right) \left. \right) + 3h_1 h_2 (E_1 h_2 + \\
 & + E_2 h_1) \left(\frac{I_{13}}{\Delta r} - 2I_{23} + I_{42} \Delta r \left(1 + \frac{2m^2}{1-\mu} \right) \right) +
 \end{aligned}$$

$$+ h_2^2 (E_1 h_2 + 3E_2 h_1) \left(\frac{I_{12}}{\Delta r} - 2I_{24} + I_{43} \Delta r \left(1 + \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{2m^2}{1-\mu} \right) \right) + E_2 h_2^3 \left(\frac{I_{10}}{\Delta r} - 2I_{20} + I_{41} \Delta r \left(1 + \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{2m^2}{1-\mu} \right) \right) \left. \right) + \frac{k^2}{2(1+\mu)} (E_1 h_1 I_{13} + (E_1 h_2 + E_2 h_1) \times \\
 \times I_{12} + E_2 h_2 I_{10}) + N_{y1}^{cm} I_{32} + N_{y2}^{cm} I_{34}.$$

$$+ \frac{k^2}{2(1+\mu)} (E_1 h_1 I_{13} + (E_1 h_2 + E_2 h_1) \times \\
 \times I_{12} + E_2 h_2 I_{10}) + N_{y1}^{cm} I_{32} + N_{y2}^{cm} I_{34}.$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \right) + \frac{k^2}{2(1+\mu)} (E_1 h_1 I_{13} + (E_1 h_2 + E_2 h_1) \times \\
 & \times I_{12} + E_2 h_2 I_{10}) + N_{y1}^{cm} I_{32} + N_{y2}^{cm} I_{34}.
 \end{aligned}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} M_{11} & \cdots & M_{16} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ M_{61} & \cdots & M_{66} \end{bmatrix} - \text{матрица масс}$$

элемента,

где $M_{44} = \rho(h_1 I_{32} + h_2 I_{34})$;

$M_{11} = \rho(h_1 I_{33} + h_2 I_{31})$; $M_{14} = \rho(h_1 I_{31} + h_2 I_{32})$;

$M_{22} = \frac{\rho}{12} (h_1^3 I_{44} + 3h_1 h_2 (h_1 I_{45} + h_2 I_{48}) + h_2^3 I_{49})$;

$M_{25} = \frac{\rho}{12} (h_1^3 I_{45} + 3h_1 h_2 (h_1 I_{48} + h_2 I_{49}) + h_2^3 I_{46})$;

$M_{33} = \frac{\rho}{12} (h_1^3 I_{44} + 3h_1 h_2 (h_1 I_{45} + h_2 I_{48}) + h_2^3 I_{49})$;

$$M_{36} = \frac{\rho}{12} (h_1^3 I_{45} + 3h_1 h_2 (h_1 I_{48} + h_2 I_{49}) + h_2^3 I_{46});$$

$$M_{55} = \frac{\rho}{12} (h_1^3 I_{48} + 3h_1 h_2 (h_1 I_{49} + h_2 I_{46}) + h_2^3 I_{47});$$

$$M_{66} = \frac{\rho}{12} (h_1^3 I_{48} + 3h_1 h_2 (h_1 I_{49} + h_2 I_{46}) + h_2^3 I_{47});$$

$$M_{12} = M_{13} = M_{15} = M_{16} = M_{23} = M_{24} = \\ = M_{26} = M_{34} = M_{35} = M_{45} = M_{46} = M_{56} = 0.$$

Матрица $[H]$ является эрмитовой. Её самосопряженность отражает одно из основных свойств спектра собственных движений поворотно-симметричных систем, проявляющихся в существовании сдвига в окружном направлении между волнами различных компонентов усилий и перемещений.

Совершив поэлементное объединение, составляется глобальное уравнение волновых динамических жесткостей диска.

С использованием разработанного конечного элемента на алгоритмическом языке программирования Фортран создана программа по расчету собственных частот и форм колебаний вращающихся неравномерно нагретых дисков.

Для подтверждения корректности полученных уравнений проведены расчетные и экспериментальные исследования собственных частот колебаний двух дисков постоянной толщины. Первый имел внутренний и внешний радиусы соответственно 25 мм и 90 мм, второй – 15 мм и 62,5 мм. Толщины у обоих дисков составляли 25 мм. Результаты исследований представлены в табл. 1, 2.

Таблица 1 – Собственные частоты колебаний диска с внешним радиусом 90 мм

Частота, Гц	Число волн деформаций			
	2	3	4	5
Расчет	3816	8278	13379	18920
Эксперимент	3811	8220	13327	18790
Погрешность, %	0,13	0,71	0,39	0,69

Таблица 2 – Собственные частоты колебаний диска с внешним радиусом 62,5 мм

Частота, Гц	Число волн деформаций			
	0	2	3	4
Расчет	11279	6915	15297	24085
Эксперимент	11168	6850	15131	23730
Погрешность, %	0,99	0,95	1,1	1,5

Из приведенных в таблицах данных хорошо видно, что рассчитанные и экспериментально определенные собственные частоты хорошо согласуются.

Разработанный дисковый волновой конечный элемент позволяет рассчитывать динамические характеристики дисков рабочих колес. Элемент учитывает неравномерный по длине нагрев, действие поля центробежных сил, а также окружные сдвиги между волнами компонентов усилий и перемещений. Главным преимуществом разработанного конечного элемента является отсутствие численного интегрирования при вычислении комплексных матриц волновых жесткостей и обобщенных масс, что существенно снижает машинное время расчета. Кроме того, на снижение времени влияет одномерность элемента.

Дисковый волновой конечный элемент реализован в виде вычислительной программы на языке Фортран.

Библиографический список

1. Ермаков, А.И. Построение оболочечного волнового конечного элемента / А.И. Ермаков // Проблемы и перспективы развития двигателестроения. Вестник СГАУ. Самара: Изд-во СГАУ, 2000. – Вып. 4. -Ч. 2. – С.72-84.

2. Иванов, В.П. Колебания рабочих колес турбомашин / В.П. Иванов.- М.: Машиностроение, 1983. - 224с.

References

1. Ermakov A.I. Shell harmonic finite element development // Problems and perspectives of propulsion engineering development. SSAU bulletin: publishing house SSAU, 2000. –Rel. 4 – P. 72-84.

2. Ivanov V.P. Vibration of blade wheels. Moscow.: «Mashinostroenie» (Mechanical engineering), 1983. – 224p.

DISK HARMONIC FINITE ELEMENT

© 2009 D. P. Davydov, A. I. Ermakov

Samara State Aerospace University

The disk harmonic finite element was developed. FORTRAN code program was developed for modal analysis of rotating nonuniform heated disks from the gas turbine engines. Natural frequencies of disks were explored.

Harmonic finite element, disk, matrix, natural frequency, complex form, force, displacement

Информация об авторах

Давыдов Данила Петрович, ассистент кафедры Конструкции и проектирования двигателей летательных аппаратов Самарского государственного аэрокосмического университета. Тел. (846) 267-46-83. E-mail: davydov-ssau@yandex.ru. Область научных интересов: динамика и прочность ГТД.

Ермаков Александр Иванович, доктор технических наук, профессор кафедры Конструкции и проектирования двигателей летательных аппаратов Самарского государственного аэрокосмического университета. Тел. (846) 334-79-22. E-mail: fdla@ssau.ru. Область научных интересов: динамика и прочность ГТД.

Davydov Danila Petrovich, assistant of Aerospace Engines Design Department of Samara State Aerospace University. Phone: (846) 267-46-83. E-mail: davydov-ssau@yandex.ru. Area of research: dynamics and strength of gas turbine engines.

Ermakov Alexander Ivanovich, Doctor of Engineering Science, professor of Aerospace Engines Design Department of Samara State Aerospace University. Phone: (846) 334-79-22. E-mail: fdla@ssau.ru. Area of research: dynamics and strength of gas turbine engines.