

## ОПТИМИЗАЦИЯ РАЗМЕЩЕНИЯ ОПОР СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК

© 2006 В. А. Комаров, С. В. Мрыкин

Самарский государственный аэрокосмический университет

Представлены решения нескольких задач размещения опор статически определимых балок по критерию минимума пика изгибающего момента, которые предназначены для оценки работоспособности и эффективности численных методов оптимизации конструкций.

**Введение**

Уменьшение массы конструкций на этапе проектирования является актуальной проблемой. Основным результатом исследований по этой проблеме стала разработка математических [1] и инженерных [2] методов оптимизации распределения материала в моделях конструкций при заданных форме, размерах, нагрузках, условиях опирания и ограничениях. Формулировки задач и методы решения, позволяющие варьировать форму, размеры, условия опирания и ограничения встречаются значительно реже [1, 2]. Одна из причин относительной редкости таких формулировок заключается в том, что многие задачи оптимизации конструкций не имеют достаточно надежных по точности расчетных решений [1].

В [3] подробно изложена формулировка задачи минимизации усилий в балке при плоско-поперечном изгибе по критерию минимума пика изгибающего момента за счет размещения опор заданного типа. Для решения задач оптимизации разработана компьютерная программа. На этапе тестирования программы выявилось отсутствие решений, позволяющих оценить точность получаемых результатов численных расчетов.

Данная работа посвящена поиску решений, позволяющих оценить точность результатов компьютерной оптимизации размещения опор балки, нагруженной типовыми распределенными нагрузками.

**1. Постановка задачи**

Пусть дана балка длиной  $l$  на двух опорах. Опоры пронумерованы слева направо по возрастанию координаты  $x$ . Погонная на-

грузка задана функцией интенсивности  $q(x)$ . Положительное значение нагрузки соответствует направлению вверх, отрицательное - вниз.

Необходимо найти такое положение опор, при котором пик изгибающего момента имеет минимальную величину.

Формализованная запись задачи оптимизации выглядит следующим образом:

$$F(X) \xrightarrow{\Omega} \inf,$$

где  $F(X) = \sup |M(x)|$  - функция цели (пик изгибающего момента);  $X = (x_1, x_2)$  - вектор проектных переменных (координаты опор);  $\Omega$  - допустимая область поиска;  $M(x)$  - распределение изгибающего момента по длине балки при текущем положении опор.

Изгибающий момент в любой точке  $x$  можно вычислить по формуле

$$M(x) = \int_0^x Q(x) dx + \sum_{x_i \leq x} M_i,$$

где  $x_i$  и  $M_i$  - координаты точек приложения и величины изгибающих моментов и моментных реакций в заделках (в рассматриваемых задачах  $M_i = 0$ );  $Q(x)$  - распределение перерезывающей силы по длине балки.

Перерезывающая сила в точке  $x$  вычисляется по формуле

$$Q(x) = \int_0^x q(x) dx + \sum_{x_i \leq x} F_i,$$

где  $x_i$  и  $F_i$  - координаты точек приложения и величины сосредоточенных сил и реакций

в опорах (в рассматриваемых задачах  $F_i = 0$ );  $q(x)$  - функция интенсивности распределенной нагрузки.

На рис. 1 показан случай  $q(x) = const$ .

Эпюра изгибающего момента построена по правилу знаков сопротивления материалов - на сжатых волокнах и имеет три экстремума: два на опорах  $M_1$  и  $M_2$  и в середине пролета  $M_3$ . Пик изгибающего момента для рассматриваемого случая определяется следующим образом:

$$M_{max} = \max(|M_1|, |M_2|, |M_3|).$$

Рассмотрим положение опор, при котором выполняется условие

$$|M_1| = |M_2| = |M_3|. \quad (1)$$

При таком размещении опор пик момента имеет минимальное значение. Действительно, если первую опору сдвинуть несколько влево, то вследствие уменьшения левой консоли  $|M_1|$  уменьшится, а  $|M_3|$  возрастет. Если ту же опору сдвинуть вправо, то  $|M_1|$  возрастет, а  $|M_3|$  уменьшится. Аналогичное рассуждение можно провести для второй опоры.

Найдем координаты  $x_1$  и  $x_2$  опор, при которых имеет место равенство (1). Значения

координат будут зависеть от вида функции  $q(x)$ . Рассмотрим три простейших типовых варианта загрузки: распределенная нагрузка постоянной интенсивности  $q(x) = const$ , нагрузка, распределенная «по треугольнику»  $q(x) = qx/l$  и «по трапеции»  $q(x) = q_1(1 - x/l) + q_2x/l$ .

## 2. Распределение нагрузки $q(x) = const$

Исходные данные для этого случая загрузки показаны на рис. 1. Для отыскания числовых значений координат опор запишем:

$$M_1 = \frac{qx_1^2}{2}, \quad M_3 = \frac{ql}{2}x_1 - \frac{ql^2}{8}. \quad (2)$$

Выражение для  $M_3$  получено из условия симметрии  $x_2 = l - x_1$ . Из (1) с учетом (2) получается уравнение

$$x_1^2 + lx_1 - \frac{l^2}{4} = 0,$$

которое имеет два корня:

$$l \frac{\sqrt{2}-1}{2}, \quad -l \frac{\sqrt{2}+1}{2}.$$

Учитывая физические ограничения координат опор ( $x_i > 0$ ), имеем:

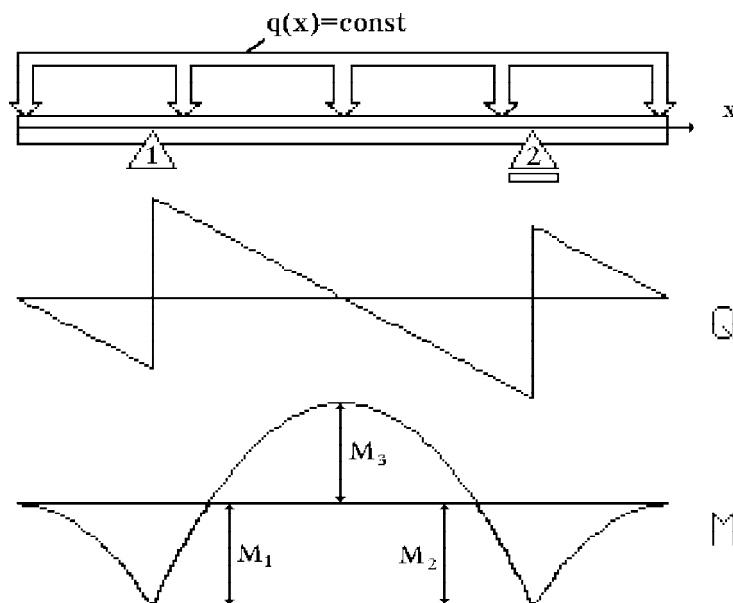


Рис. 1

$$x_1 = l \frac{\sqrt{2}-1}{2} = 0,2071l,$$

$$x_2 = l \frac{3-\sqrt{2}}{2} = 0,79289l.$$

Пик изгибающего момента при таком положении опор имеет величину  $0,0215ql^2$ , при положении опор по краям балки -  $0,125ql^2$ . Таким образом, за счет размещения опор можно уменьшить пик почти в шесть раз.

### 3. Распределение нагрузки $q(x) = qx/l$

Исходные данные для этого случая нагружения показаны на рис. 2.

Эта задача несимметрична, что существенно усложняет решение, и поэтому вначале найдем уравнение связи координат  $x_1$  и  $x_2$ , при котором будет выполняться условие:  $M_1 = M_2$ . Для этого запишем выражения для значений изгибающего момента на опорах:

$$M_1 = \frac{qx_1^3}{6l}, \quad M_2 = \frac{qx_2^3}{6l} - \frac{qlx_2}{2} + \frac{ql^2}{3}. \quad (3)$$

Из условия равенства моментов на опорах с учетом (3) получим

$$x_1 = \sqrt[3]{(x_2 + 2l)(x_2 - l)^2}. \quad (4)$$

Теперь получим выражение для  $M_3$ , определив координату  $x$  положения  $M_3$  в пролете. Координату  $x$  найдем из условия

$$Q(x) = \frac{dM(x)}{dx} = \frac{qx^2}{2l} - \frac{ql(3x_2 - 2l)}{6(x_2 - x_1)} = 0,$$

откуда:

$$x = l \sqrt{\frac{3x_2 - 2l}{3(x_2 - x_1)}}. \quad (5)$$

Записав выражение  $M(x)$  для  $x_1 < x < x_2$  и подставив выражение (5), получим

$$M_3 = \frac{ql(3x_2 - 2l)}{3(x_2 - x_1)} \left[ \frac{x_1}{2} - \frac{l}{3} \sqrt{\frac{3x_2 - 2l}{3(x_2 - x_1)}} \right]. \quad (6)$$

Из (1) и рис. 2 с учетом знаков следует:

$$M_1 + M_3 = 0. \quad (7)$$

Заменив в (7)  $M_1$  и  $M_3$  выражениями из (3) и (6) и выполнив алгебраические преобразования, получим

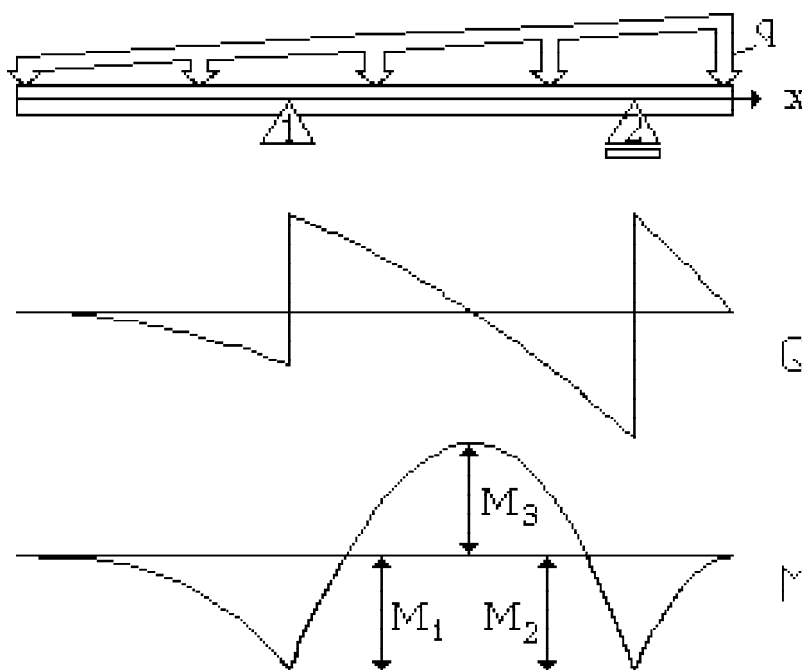


Рис. 2

$$\frac{4}{27} \left[ 1 + \frac{x_2}{x_1} + \left( \frac{x_2}{x_1} \right)^2 \right] = \left[ 1 + \frac{x_2}{x_1} + \left( \frac{x_2}{x_1} \right)^2 \right]^2.$$

При выполнении алгебраических преобразований предполагалось:

$$0 < x_1 \neq x_2 < 1, \quad x_2 \neq \frac{2}{3}l. \quad (8)$$

Полагая  $y = x_2/x_1$  и  $z = 1 + y + y^2$ , получим уравнение

$$\frac{4}{27} z^3 - z^2 - 2z - 1 = 0.$$

Анализ коэффициентов полученного кубического уравнения показывает, что оно имеет один вещественный корень и два комплексных сопряженных корня. Решая кубическое уравнение, получим приближенное значение вещественного корня:  $z = 8,44354$ . Подставив полученное значение в квадратное уравнение  $z(y)$  и решив его, получим:  $y_1 = -3,27372$  и  $y_2 = 2,27372$ . Учитывая (8), выбираем положительный корень.

Для отыскания координат опор  $x_1$  и  $x_2$  воспользуемся уравнением связи координат (4)

$$\begin{cases} \frac{x_2}{x_1} = 2,27372, \\ x_1 = \sqrt[3]{(x_2 + 2l)(x_2 - l)^2}, \end{cases} \quad (9)$$

которое сводится к выражению

$$x_1^3 - 0,63425x_1 + 0,18596 = 0,$$

где  $x_1 = x_1/l$ . Это уравнение имеет три вещественных корня:  $0,53601$ ,  $-0,99514$  и  $0,37912$ .

Учитывая (8) для  $x_i$ , а также первое уравнение системы (9), окончательно имеем:

$$x_1 = 0,37912l,$$

$$x_2 = 0,86202l.$$

Пик изгибающего момента при таком положении опор имеет величину  $0,009ql^2$ , а при положении опор по краям балки -  $0,064ql^2$ . Таким образом, за счет рационального размещения опор можно уменьшить пик более чем в семь раз.

#### 4. Распределение нагрузки

$$q(x) = q_1(1 - x/l) + q_2x/l$$

Исходные данные для этого случая нагружения показаны на рис. 3.

Будем предполагать, что  $q_2 > q_1$ . В противном случае достаточно изменить направление оси  $x$  и переименовать концы распределенной нагрузки.

Из условий равенства моментов на опорах  $M_1 = M_2$ , равенства моментов на опоре и в пролете (7) и определения координаты положения  $M_3$  в пролете  $Q(x) = 0$  получим систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} (1 - \bar{q})(a^3 - 1)x_2^3 + 3\bar{q}(a^2 - 1)x_2^2 + \\ + 3(1 + \bar{q})x_2 - \bar{q} - 2 = 0, \\ \bar{q} \frac{3(x_1^2 + x^2) - x_1^3 - x^3}{6} + \frac{x_1^3 + x^3}{6} - \\ - \bar{q} \frac{(3x_2 - 1)(x - x_1)}{6x_2(1 - a)} - \frac{(3x_2 - 2)(x - x_1)}{6x_2(1 - a)} = 0, \quad (10) \\ \frac{x^2}{2}(1 - \bar{q}) + x\bar{q} - \frac{\bar{q} + 1}{2(1 - a)} + \frac{\bar{q} + 2}{6x_2(1 - a)} = 0. \end{cases}$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\bar{q} = \frac{q_1}{q_2} \text{ - параметр нагрузки;}$$

$$x_i = \frac{x_i}{l} \text{ - относительная координата } i\text{-ой опоры;}$$

$$a = \frac{x_1}{x_2} \text{ - отношение координат опор.}$$

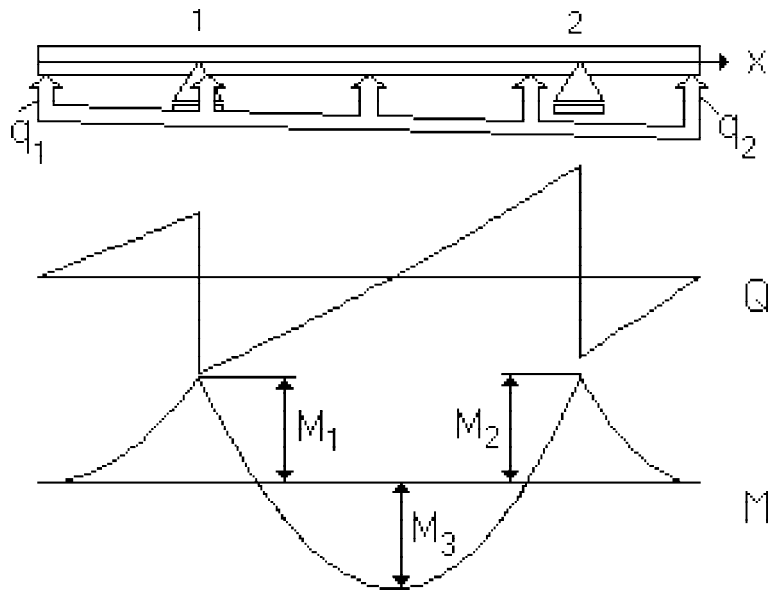


Рис. 3

Полученную систему (10) решать аналитически громоздко, и поэтому была построена вспомогательная функция, равная сумме квадратов частей уравнений, находящихся слева от знаков равенства. Эта функция принимает минимальное значение, равное нулю, только при тех значениях аргументов,

которые удовлетворяют всем уравнениям системы (10). Минимум функции отыскивался методом Монте-Карло.

Результаты численного решения системы (10) при различных значениях  $\bar{q}$  показаны на рис. 4 и 5.

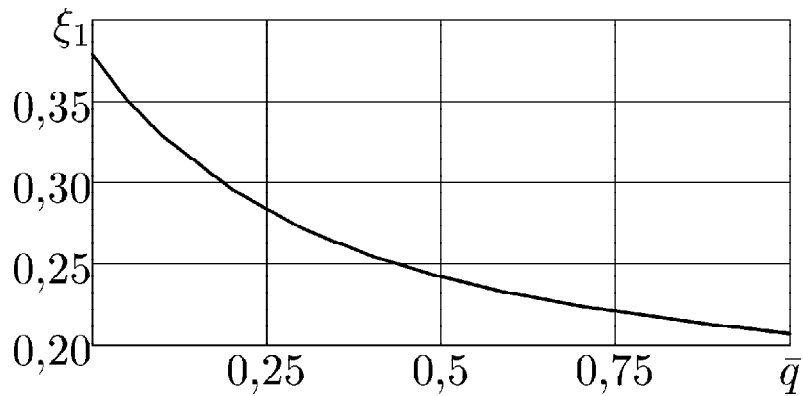


Рис. 4

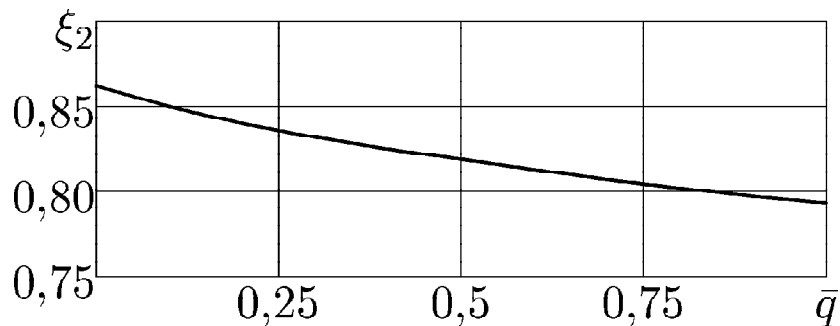


Рис. 5

Приведенные на графиках результаты показали ожидаемое поведение системы (10). При  $\bar{q} = 1$  решение соответствует случаю загрузки распределенной нагрузкой постоянной интенсивности, а при  $\bar{q} = 0$  - нагрузке, распределенной по «треугольнику». При этом относительные координаты опор  $x_i$  меняются согласованно, плавно стыкуясь со значениями, полученными для ранее рассмотренных случаев загрузки.

### Заключение

1. В рассмотренных задачах оптимальное размещение опор существенно уменьшает пик изгибающего момента (в 6–7 раз) по сравнению с размещением опор по концам балки.

2. При кажущейся простоте формулировки рассмотренные задачи обладают привлекательными свойствами для оценки работоспособности и эффективности методов оптимизации, это: небольшое число независимых переменных, ясные параметрические ограничения, отсутствие функциональных ограничений, нелинейный характер функции цели. В работе [4] такие задачи считаются идеальными для тестирования и освоения численных методов оптимизации.

На рис. 6 показана геометрическая интерпретация оптимизационной задачи для случая  $q(x) = const$  в форме поверхности функции цели.

Поверхность функции цели в трехмерном пространстве (рис. 6) представляет со-

бой две области, симметричные относительно диагонали, соответствующей точкам совмещения опор. На всей этой линии, за исключением одной изолированной точки, значения функции цели не определены, так как балка при таком размещении опор ведет себя как механизм. Изолированная точка представляет собой положение неустойчивого равновесия, когда опоры совмещены, но находятся под равнодействующей внешней нагрузки.

Каждая из областей, расположенных по обе стороны от диагонали, образуется тремя поверхностями. Две из поверхностей представляют собой выпуклые книзу линейчатые поверхности с квадратичными образующими. На линиях равного уровня (рис. 7) эти поверхности показаны в виде прямых, параллельных осям координат. Эти прямые соответствуют таким положениям опор, при которых нагрузка с одной из консолей превышает нагрузку в пролете.

Третья поверхность соответствует таким положениям опор, при которых нагрузка в пролете превышает нагрузку на консолях. Сечение этой поверхности плоскостью, проходящей через точки (0,1) и (1,0), представляет собой прямую линию. Линии пересечения с плоскостями  $x_1 = 1$  и  $x_2 = 0$  являются параболлами, обращенными выпуклостью вверх. Линии пересечения трех поверхностей образуют «русла оврагов», которые ведут к точке оптимума.

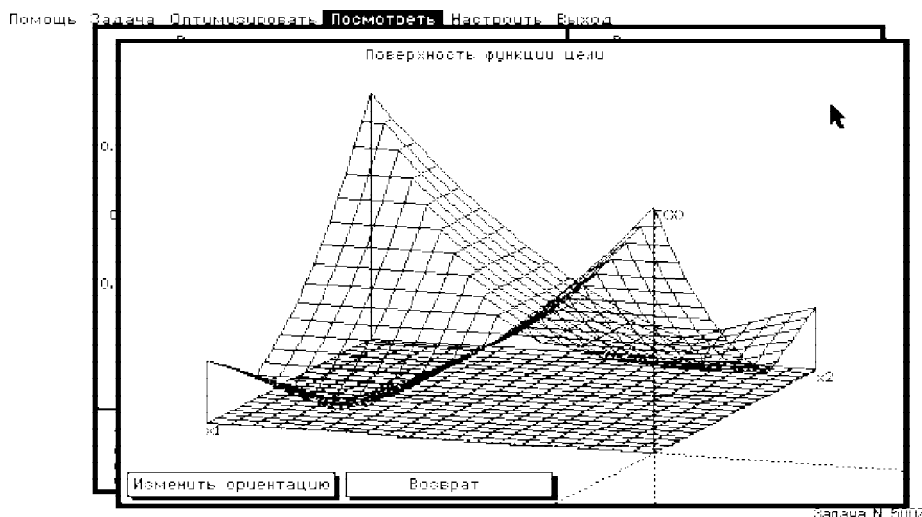


Рис. 6. Поверхность функции цели

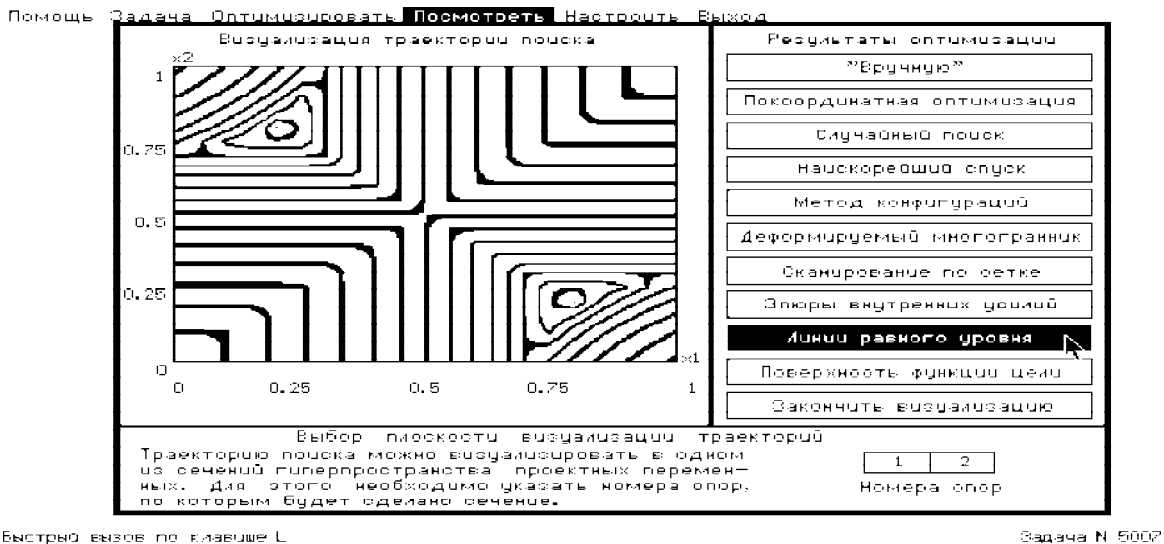


Рис. 7. Изолинии функции цели

### Список литературы

1. Методы оптимизации авиационных конструкций/Н. В. Баничук, В. И. Бирюк, А. П. Сейранян и др. - М.: Машиностроение, 1989.
2. Комаров В. А. Проектирование силовых схем авиационных конструкций // В кн. Актуальные проблемы авиационной науки и техники. -М.: Машиностроение, 1984. - С. 114–129.
3. Мрыкин С. В. Математическое и программное обеспечение методов геометричес-

- кого моделирования и оптимизации в среде учебно-исследовательской САПР силовых конструкций: Дисс...канд. технич. наук: 05.13.12 / Самара: СГАУ, 1999.
4. Бобков Н. К., Грудачев В. Г., Дворянкин А. М. Некоторые методические рекомендации по постановке оптимизационных задач / Автоматизированное оптимальное проектирование инж. объектов и технологич. процессов. Ч. 1. – Горький: ГГУ. - 1974. - С. 5-14.