

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОЙ ВОЗДУХОМ ТРУБОПРОВОДНОЙ МАГИСТРАЛИ

© 2006 В. П. Шорин, М. А. Гимадиев

Самарский государственный аэрокосмический университет

Изложена методика расчета гидродинамических параметров при движении столба жидкости в пластмассовой трубопроводной магистрали, частично заполненной воздухом и подключенной к емкости с воздушной полостью над жидкостью. Движение жидкости начинается с момента открытия электропневмозаслонки и зависит от давления в емкости, параметров трубопроводов и числа их изгибов. Расчет гидродинамических параметров ведется в результате решения нелинейных интегрально-дифференциальных уравнений конечно-разностным методом. В результате расчета определяются скорость жидкости, силы реакции жидкости в изгибах трубопроводов и анализируется влияние действующих на них факторов.

Малый опыт эксплуатации пластмассовых труб и арматуры в технологических системах не позволяет учесть многие их особенности при проектировании и доводке. Поэтому в процессе эксплуатации таких систем часто возникают задачи, связанные с обеспечением их надежности.

Целью исследований является разработка математической модели гидродинамических процессов в трубопроводной магистрали, подсоединенной к емкости с воздушной полостью над жидкостью (рис. 1), и определение динамических нагрузок в изгибах трубопроводов при резком открытии электропневмозаслонки (ЭПЗ).

При расчете гидродинамических процессов принят ряд допущений: процесс истечения воздуха из емкости в трубопровод происходит по изотермическому циклу; скорость движения столба жидкости в трубопроводе намного меньше скорости звука; движение воздуха в трубопроводе (впереди потока жидкости) рассчитывается по квазистационарной модели; жидкостная «пробка» распространяется по трубопроводной магистрали без остатка.

В соответствии с принятыми допущениями гидродинамический процесс в трубопроводной магистрали описывается интегральными и дифференциальными уравнениями, соответственно для входного (воздушного) участка, для участка с движущейся жидкостной пробкой и выходного воздушного участка.

Уравнение для воздушного участка на входе в трубопровод выводится на основании уравнения баланса массы газа в емкости (над жидкостью) (рис. 1). Первоначальная масса газа, запасенная в верхней части емкости (фильтра), определяется зависимостью

$$M_{z,0} = V_{\phi,0} r_{z,0}, \quad (1)$$

где $V_{\phi,0}$ - объем воздушной полости над жидкостью в емкости в первоначальный момент

времени; $r_{z,0} = \frac{P_{\phi,0}}{RT}$, $P_{\phi,0}$ - плотность и да-

вление газа в емкости в первоначальный момент времени; R - газовая постоянная; T - температура газа.

При открытии заслонки жидкость, находящаяся в трубопроводах 1 и 2, начинает двигаться со скоростью $v_{ж}(t)$. При этом газ расширяется и давление в емкости $P_{\phi}(t)$ уменьшается. Масса газа, оставшаяся в емкости $M_{z,\phi}(t)$ и прошедшая в трубопровод $M_{z,mp}(t)$, равна первоначальной массе газа в газовой полости емкости:

$$M_{z,0} = M_{z,\phi}(t) + M_{z,mp}(t). \quad (2)$$

Масса газа, оставшаяся в емкости, определяется по формуле

$$M_{z,\phi} = r_{z,\phi}(t) [V_{\phi,0} - \Delta V_{ж}(t)], \quad (3)$$

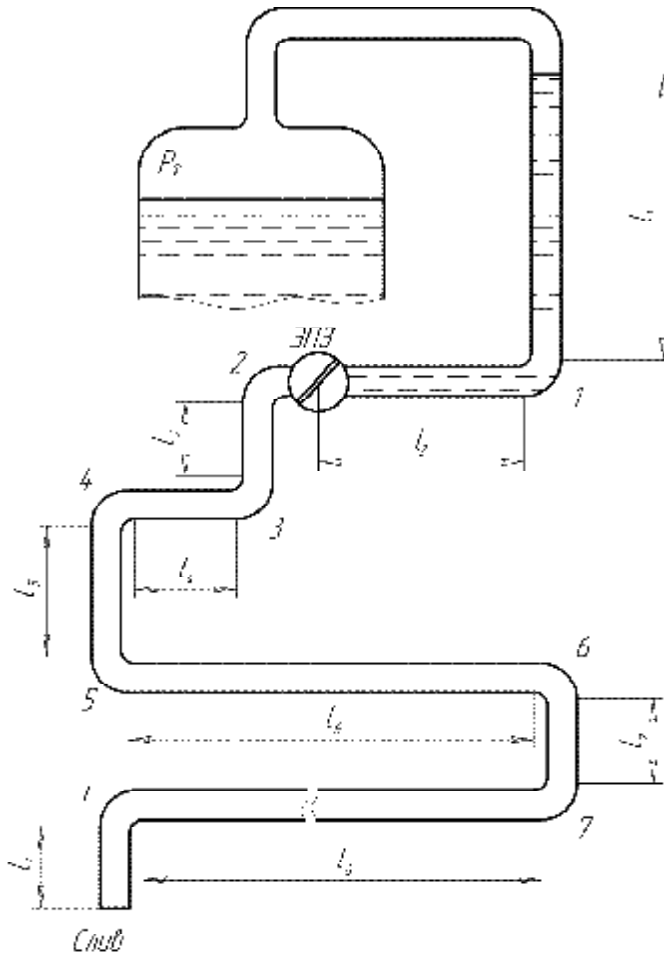


Рис. 1. Расчетная схема частично заполненной воздухом трубопроводной магистрали, подсоединенной к емкости с воздушной полостью

где $r_{г.ф}(t)$ - плотность газа в емкости в момент времени t ; $\Delta V_{ж.ф}(t)$ - приращение объема жидкости, обусловленной ее расширением в результате падения давления и упругой деформации стенок емкости.

Приращение объема жидкости $\Delta V_{ж.ф}(t)$ определяется зависимостью

$$\Delta V_{ж.ф}(t) = \frac{V_{ж.ф}}{B_{ж.ф}} [P_{ф.0} - P_{ф}(t)], \quad (4)$$

где $V_{ж.ф}$ - объем жидкости в емкости;

$B_{ж.ф}$ - модуль объемной упругости жидкости в емкости с учетом податливости ее стенок;

$P_{ф.0}$ - первоначальное давление в газовой полости емкости.

Величина $B_{ж.ф}$ может быть приближенно определена по формуле Н. Е. Жуковского [1]

$$B_{ж.ф} = \frac{B_{ж}}{1 + \frac{d_{ф} B_{ж}}{dE}}, \quad (5)$$

где $B_{ж}$ - модуль объемной упругости жидкости; $d_{ф}$ - диаметр емкости; d - толщина стенок емкости; E - модуль упругости материала стенок емкости. Более точное значение $B_{ж.ф}$ может быть получено экспериментально путем измерений объема жидкости $\Delta V_{ж.ф}$, вытесненной из тщательно заполненной водой емкости, и падения давления в ней $\Delta P_{ф}$:

$$B_{ж.ф} = V_{ж.0} \frac{\Delta P_{\phi}}{\Delta V_{\phi}}, \quad (6)$$

где $V_{ж.0}$ - внутренний объем емкости, полностью заполненной жидкостью.

Плотность газа $r_{з.ф}(t)$, представленная в формуле (3), зависит от давления $P_{\phi}(t)$ [1]:

$$r_{з.ф}(t) = \frac{P_{\phi}(t)}{RT}. \quad (7)$$

С учетом (4) и (7) формула (3) переписывается в виде

$$M_{з.ф}(t) = \frac{P_{\phi}(t)}{RT} \left\{ V_{\phi.0} - \frac{V_{ж.ф}}{B_{ж.ф}} [P_{\phi.0} - P_{\phi}(t)] \right\}. \quad (8)$$

Масса газа, прошедшего в первый участок трубопровода, определяется зависимостью

$$M_{з.мп}(t) = r_{з.мп}^{(1)}(t) \int_0^t Q_{ж}(t) dt, \quad (9)$$

где $r_{з.мп}^{(1)}(t)$ - плотность газа; $Q_{ж}(t) = v_{ж}(t)F$ - объемный расход жидкости, движущейся в трубопроводе; F - площадь проходного сечения трубопровода.

Плотность газа в трубопроводе $r_{з.мп}^{(1)}(t)$ зависит от давления газа $P_{\phi}(t)$ (без учета гидравлических потерь на трение по сравнению с абсолютным значением давления):

$$r_{з.мп}^{(1)}(t) = \frac{P_{\phi}(t)}{RT}. \quad (10)$$

Уравнение (2) с учетом (8) - (10) переписывается в виде

$$\frac{P_{\phi.0} V_{\phi.0}}{RT} = \frac{P_{\phi}(t)}{RT} \left\{ V_{\phi.0} - \frac{V_{ж.ф}}{B_{ж.ф}} [P_{\phi.0} - P_{\phi}(t)] \right\} + \frac{P_{\phi}(t)}{RT} \int_0^t Q_{ж}(t) dt. \quad (11)$$

Сократив RT в левой и правой частях (11) и преобразовав, получим

$$\frac{V_{ж.ф}}{B_{ж.ф}} P_{\phi}^2(t) + \left[\int_0^t Q_{ж}(t) dt - \frac{V_{ж.ф}}{B_{ж.ф}} P_{\phi.0} + V_{\phi.0} \right] \times P_{\phi}(t) - P_{\phi.0} V_{\phi.0} = 0. \quad (12)$$

Если известна величина $\int_0^t Q_{ж}(t) dt$, то уравнение (12) можно решить относительно $P_{\phi}(t)$, предварительно представив его в виде

$$aP_{\phi}^2(t) + bP_{\phi}(t) - c = 0, \quad (13)$$

где $a = \frac{V_{ж.ф}}{B_{ж.ф}}$; $b = \int_0^t Q_{ж}(t) dt - \frac{V_{ж.ф}}{B_{ж.ф}} P_{\phi.0} + V_{\phi.0}$; $c = P_{\phi.0} V_{\phi.0}$.

Решив квадратное уравнение (13), получим

$$P_{\phi}(t) = \frac{\sqrt{b^2 + 4ac} - b}{2a}. \quad (14)$$

Если $P_{\phi}(t)$ имеет отрицательное значение, то из физических соображений ему будет присвоено нулевое значение.

Уравнение движения газа в трубопроводе за ЭПЗ, представленное относительно давления на входе в воздушный участок магистральной $P_{з.мп}^{(1)}(t)$, записывается в виде [2]:

$$P_{з.мп}^{(1)}(t) = \left\{ \left[1 - \frac{1}{RT} (v_{з.мп}^{(1)}(t))^2 \times \left[I_z \frac{l_{вых} - \Delta l_2(t)}{d} + 2 \ln \left(\frac{P_{з.мп}^{(1)}(t)}{P_H} \right) \right] \right] \right\}^{-\frac{1}{2}} P_H, \quad (15)$$

где $v_{з.мп}^{(1)}(t)$ - скорость потока газа на входе в воздушный участок трубопровода за движущейся жидкостью (рис. 1); I_z - коэффициент

сопротивления трения газового потока; $l_{\text{вых}}$ - длина выходного участка трубопровода после заслонки, заполненного воздухом; $\Delta l_2(t)$ - отрезок трубопровода за ЭПЗ, который прошел столб жидкости после открытия заслонки; P_H - давление на выходе из трубопроводной магистрали.

Так как $v_{z.mp}^{(1)}(t) = \frac{Q_{жс}(t)}{F}$ и

$$\Delta l_2(t) = \frac{1}{F} \cdot \int_0^t Q_{жс}(t) \cdot dt, \text{ то уравнение (15)}$$

перепишется в виде

$$P_{z.mp}^{(1)}(t) = \left\{ 1 - \frac{Q_{жс}^2(t)}{RTF^2} \left(\frac{l_z(l_{\text{вых}} - \frac{1}{F} \int_0^t Q_{жс}(t) dt) +}{2 \ln \left(\frac{P_{z.mp}^{(1)}(t)}{P_H} \right)} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} P_H. \quad (16)$$

Из (16) следует, что противодействие на столб жидкости со стороны воздушного участка магистрали зависит от расхода жидкости, параметров трубопровода и давления окружающей среды P_H .

При выводе зависимости для определения давления на выходе из воздушного участка трубопровода перед столбом жидкости приняты следующие допущения: движение газа по трубопроводу изотермическое, квазистационарное; инерционное сопротивление столба газа в трубопроводе мало по сравнению с активными потерями. Тогда аналогично выводу уравнения (16) можно получить выражение для определения давления $P_{z.mp}^{(2)}(t)$ на выходе из входного участка трубопровода (на входе в жидкостный столб):

$$P_{z.mp}^{(2)}(t) = \left\{ 1 - \frac{Q_{жс}^2(t)}{RTF^2} \left(\frac{l_z(l_{\text{вх}} + \frac{1}{F} \int_0^t Q_{жс}(t) dt) +}{2 \ln \left(\frac{P_{\phi}(t)}{P_{z.mp}^{(2)}} \right)} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} P_{\phi}(t), \quad (17)$$

где $l_{\text{вх}}$ - длина воздушного участка трубопровода перед жидкостным столбом до открытия заслонки.

Уравнение движения жидкости в трубопроводной магистрали выводится на основе уравнения баланса сил, действующих на массу жидкости. С учетом принятых ранее допущений уравнение движения жидкости в трубопроводе записывается в виде [3]:

$$L_a(t) \frac{dQ_{жс}(t)}{dt} + K_{нл}(t) Q_{жс}(t) |Q_{жс}(t)| = P_{z.mp}^{(2)}(t) - P_{z.mp}^{(1)} + \frac{r_{жс} g}{F} (V_{жс.0} - \int_0^t Q_{жс}(t) dt), \quad (18)$$

где $L_a(t)$ - акустическая индуктивность участка трубопровода, заполненного жидкостью;

$K_{нл}(t) = \frac{r_{жс}}{2F^2} \left(\sum_{i=1}^{i=l} V_{м.нл}^{(i)} + I_{жс.нл} \frac{l_{жс}}{d} \right)$ - коэффициент нелинейного гидравлического сопротивления участка трубопровода, заполненного жидкостью; $V_{м.нл}^{(i)}$ - коэффициент i -ых местных гидравлических потерь (изгибов трубопроводов) при неустановившемся движении жидкости; $I_{жс.нл}$ - коэффициент гидравлических потерь в трубопроводе при неустановившемся движении жидкости; $l_{жс} = l_1 + l_2$ - длина участка трубопровода, заполненного жидкостью; $r_{жс}$ - плотность жидкости; g - ускорение свободного падения; $V_{жс.0}$ - объем жидкости в вертикальном участке трубопровода длиной l_1 .

Из полученных уравнений (12), (17) и (18) следует, что возможны различные режимы движения жидкости в трубопроводной магистрали, и поэтому определение $L_a(t)$ и $K_{нл}(t)$ следует проводить отдельно для каждого режима.

Режим 1. В емкости присутствует воздушная подушка над жидкостью, и трубопровод, начиная от ЭПЗ до выхода, заполнен воздухом. Акустическая индуктивность $L_a(t)$ в момент времени t определяется зависимостью

$$L_a(t) = \frac{r_{жс} l_{жс}}{F} \text{ при } \frac{1}{F} \int_0^t Q_{жс}(t) dt \leq l_{\text{вых}} - l_{жс},$$

$$L_a(t) = \frac{r_{жс}}{F} (l_{жс} - l_{вых} + \frac{1}{F} \int_0^t Q_{жс}(t) dt) \quad (19)$$

$$\text{при } \frac{1}{F} \int_0^t Q_{жс}(t) dt \geq l_{вых} - l_{жс}.$$

Режим 2. В емкости присутствует воздушная полость над жидкостью, и трубопровод, начиная от ЭПЗ до выхода, заполнен жидкостью. Уравнение движения жидкости запишется в виде

$$\begin{aligned} L_a(t) \frac{dQ_{жс}(t)}{dt} + K_{нл}(t) Q_{жс}(t) |Q_{жс}(t)| = \\ = P_{з.мп}^{(2)}(t) + \frac{r_{жс} g}{F} (V_{жс.0} - \int_0^t Q_{жс}(t) dt). \end{aligned} \quad (20)$$

Коэффициент гидравлического сопротивления $K_{нл}(t)$ определяется в соответствии с (18), а акустическая индуктивность рассчитывается по зависимости

$$L_a(t) = \frac{r_{жс}}{F} (l_{жс} + l_{вых} - \frac{1}{F} \int_0^t Q_{жс}(t) dt). \quad (21)$$

Движение жидкости в трубопроводе начинается с момента открытия ЭПЗ, характеристика которого учитывается при расчете суммарного сопротивления $K_{нл}(t)$. ЭПЗ открывается за время t_3 . Принимая во внимание, что площадь проходного сечения заслонки в открытом положении равна $F_{3,0} = gF$ (где g - коэффициент, учитывающий стесненность потока жидкости из-за наличия самой заслонки и узла ее крепления), закон изменения площади проходного сечения заслонки для трубопровода можно определить на основе данных, приведенных в [4]:

$$F_3(t) = F_{3,0} \cdot [1 - \cos(at)]. \quad (22)$$

Если заслонка за время $t = t_3$ поворачивается на угол, равный $p/2$, т. е. полностью открывается, то закон изменения площади

проходного сечения заслонки (22) можно представить в виде

$$F_3(t) = \begin{cases} gF_{3,0} \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{p}{2} \cdot \frac{t}{t_3}\right)\right) & \text{при } t < t_3; \\ gF_{3,0} & \text{при } t \geq t_3. \end{cases} \quad (23)$$

В результате решения системы нелинейных интегрально-дифференциальных уравнений для трубопроводной магистрали с переменными параметрами может быть определена скорость движения жидкости в любом заданном сечении в заданный момент времени.

Расчет гидродинамических параметров потока жидкости в сливной магистрали при открытии заслонки проводится на основе решения нелинейных интегрально-дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Решение таких уравнений в явном виде не представляется возможным, и поэтому применен метод последовательных приближений с представлением интегрально-дифференциальных уравнений в разностной форме.

Перепишем уравнение (17) в следующем виде:

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \left[\frac{P_{з.мп}^{(2)}(t) - P_{з.мп}^{(1)}(t) + \frac{r_{жс} g}{F} \times (V_{жс.0} - \int_0^t Q_{жс}(t) dt) - K_{нл}(t) Q_{жс}(t) |Q_{жс}(t)|}{L_a(t)} \right] / L_a(t). \quad (24)$$

Разностное уравнение, записанное на основании (24), имеет вид:

$$Q_{1,i} = Q_{1,i-1} + \left[\left(\frac{P_{з.мп,i-1}^{(2)} - P_{з.мп,i-1}^{(1)} + \frac{r_{жс}}{F} (V_{жс.0} - \sum_{i=1}^{i=J} Q_{жс,i-1} \Delta t) - K_{нл,i-1} Q_{жс,i-1} |Q_{жс,i-1}|}{L_{a,i-1}} \right) \right] \Delta t, \quad (25)$$

где $K_{нл,i-1}$, $L_{a,i-1}$, $P_{з.мп,i-1}^{(1)}$, $P_{з.мп,i-1}^{(2)}$, $Q_{жс,i-1}$ - соответственно коэффициент гидравлических потерь, акустическая индуктивность, давление и расход жидкости, рассчитываемые на предыдущем шаге интегрирования с учетом

начальных условий; Δt - шаг интегрирования.

На основании выведенных формул составлены алгоритм и программа расчета гидродинамических параметров трубопроводной магистрали [6]. В результате расчета определяются расход (скорость потока) жидкости в трубопроводной магистрали и давление в емкости. При известной скорости жидкости в местах изгиба рассчитываются гидродинамические силы, действующие на трубопроводы. Так как по допущению о сосредоточенности параметров трубопроводов объемная скорость потока в пределах выделенного столба жидкости одинакова, то и силы реакции струи в местах изгиба при одинаковых скоростях в один и тот же момент времени будут одинаковы. Поэтому для определения силы реакции струи жидкости в местах изгиба трубопроводов достаточно рассчитать скорость потока и определить, проходит ли в этот момент времени жидкость через тот или иной изгиб.

Гидродинамические силы рассчитываются на основе теоремы о количестве движения материальных точек. При выводе расчетных зависимостей будем предполагать, что движение жидкости в месте изгиба трубопровода квазистационарное. На основании теоремы об изменении количества движения массы жидкости, находящейся в изгибе трубопровода между сечениями на входе и выходе (рис. 2), можно записать [5]:

$$\left. \begin{aligned} b_0 r_{ж} Q_{ж} v_Y &= R_{mp.Y} - R_Y - R_{P.вх}, \\ b_0 r_{ж} Q_{ж} v_X &= R_{mp.X} + R_X - R_{P.вых} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

где b_0 - коэффициент, учитывающий неравномерность скорости потока жидкости по сечению трубопровода на входе в изгиб и на его выходе; v_Y - средняя по сечению трубопровода скорость потока жидкости на входе в изгиб; $R_{mp.Y}$ - проекция силы трения жидкости о стенку трубопровода внутри изгиба на ось Y ; R_Y - сила реакции струи на стенки трубопровода вдоль оси Y ; v_X - средняя по сечению трубопровода скорость потока жид-

кости на выходе из изгиба; $R_{mp.X}$ - проекция силы трения жидкости о стенки трубопровода внутри изгиба на ось X ; R_X - сила реакции струи на стенки трубопровода вдоль оси X ; $R_{P.вх}$, $R_{P.вых}$ - проекции силы давления жидкости соответственно на оси X и ось Y .

Так как участки трубопровода в месте изгиба малы, то при расчетах потерями на трение о стенки можно пренебречь: $R_{mp.X} \approx 0$, $R_{mp.Y} \approx 0$. Кроме того, учитывая большой диаметр трубопровода по отношению к пограничному слою и турбулентный характер потока, можно принять $b_0 = 1$. Учитывая однородность потока и одинаковость диаметров проходных сечений на входе в изгиб и на выходе из него, можно принять

$$v_X = v_Y = v, \quad (27)$$

$$R_{P.вх} = P_{вх} F, \quad R_{P.вых} = P_{вых} F, \quad (28)$$

где $P_{вх}$, $P_{вых}$ - статическое давление жидкости на входе в изгиб и на его выходе.

Тогда на основании (26)-(28) и принятых допущений силы реакции струи по осям X и Y запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} R_Y &= P_{вх} F + r_{ж} Q_{ж} v, \\ R_X &= P_{вых} F + r_{ж} Q_{ж} v. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

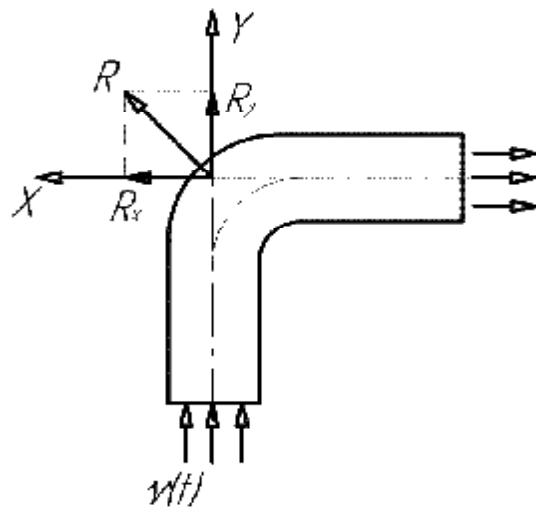


Рис. 2. Схема приложения сил реакции струи жидкости в месте изгиба трубопровода

Суммарная сила реакции струи на изгиб определяется по формуле

$$R = \sqrt{2(r_{жс} Q_{жс} v)^2 + (P_{вх} + P_{вых})^2} F. \quad (30)$$

При действии силы реакции струи R на изгиб трубопровод испытывает сложное напряженное состояние. Входной и выходной участки трубопроводов подвергаются одновременно растяжению и изгибу. Сила R_x создает на входном участке изгибающий момент, а R_y - растяжение; на выходном участке R_x растягивает, а R_y создает изгибающий момент. В зависимости от конфигурации входного и выходного участков труб и степени крепления их в опорных точках могут быть определены напряжения в опасных сечениях и рассчитан запас прочности трубопроводных магистралей.

Список литературы

1. Попов Д. Н. Механика гидро- и пневмоприводов. – М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2002.
2. Ибрагимов А. И., Фарзани Н. Г., Илясов Л. В. Элементы и системы пневмоавтоматики. Учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1975.
3. Шорин В. П. Устранение колебаний в авиационных трубопроводах. – М.: Машиностроение, 1980.
4. Башта Т. М. Гидропривод и гидропневмоавтоматика. – М.: Машиностроение, 1976.
5. Прандтль Л. Гидроаэромеханика. – М.: Издательство иностранной литературы, 1951.
6. Шорин В. П., Гимадиев М. А. Алгоритм расчета гидродинамических параметров частично заполненной воздухом трубопроводной магистрали // Вестник СГАУ. – Самара, 2006. № 1(9). – С. 214-218.