УДК 37.013.75

ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УСВОЕНИЯ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА С УЧЕТОМ ФАКТОРА МОТИВАЦИИ

© 2006 Е. Н. Рябинова[1], Б. А. Титов[2]

[1]Самарский государственный технический университет
[2]Самарский государственный аэрокосмический университет

Приводятся результаты разработки математической модели усвоения учебного материала, основанной на непрерывном мониторинге развития учебных способностей учащихся и соответствующей корректировке учебного процесса по определенным, заранее структурированным его составляющим. Модель усвоения представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений двенадцатого порядка, записанную относительно функций усвоения и так называемых мотивационных составляющих учебной информации.

Введение

Цель математического моделирования дидактических процессов состоит в том, чтобы прояснить неподдающиеся наблюдению и эксперименту явления, процессы и закономерности обучения учащихся, выявить поведение и реакции обучающих, обусловленные множеством разнородных и противоречивых факторов, и использовать полученные результаты для разработки эффективной технологии обучения.

Проблеме математического моделирования дидактических процессов посвящено достаточно большое число работ, например, исследования Л. Б. Ительсона [1], Х. Франка [2], Р. Буша, Ф. Мостеллера [3], Р. Аткинсона, Г. Бауэра, Э. Кротерса [4], Д. Ллойда [5], Л. П. Леонтьева и О. Г. Гохмана [6], М. И. Потеева [7, 8], С. А. Пиявского [9, 10].

В монографии [1] отмечается неоднозначность протекания дидактических процессов, заключающаяся в том, что применение одинаковых объективных факторов обучения (методов, средств, организации и т.п.) дает в каждом конкретном случае отличающиеся результаты. Отсюда делается вывод о том, что изоморфным отображением дидактических процессов могут быть вероятностные модели. Однако понятно, что математические модели педагогических явлений и процессов, которые получаются вероятностными методами, не носят реального, содержательного характера. Л. Б. Ительсон отмечает, что преодолеть указанный недостаток позволяет кибернетический метод, который исходит из того, что дидактические процессы относятся к классу управляемых, и, следовательно, подчинены объективным закономерностям, присущим всем процессам этого класса.

В этом же направлении проводились исследования по построению кибернетической педагогики [2], ставилась задача разработки статистических моделей обучаемости [3]. В работе [4] использовались статистические методы для моделирования процесса обучения, а в [5] анализировались коммуникационные связи обучаемых и обучающих в дидактическом процессе и также ставилась задача разработки модели обучения.

В работе [6] разрабатывались символьные модели и рассматривалось их применение для целей оптимизации учебного процесса. Было отмечено, что начало 80-х годов прошлого столетия ознаменовалось появлением в дидактике целого ряда теоретико-множественных, функциональных, информационно-детерминированных, информационно-статистических, эвристических и других моделей. Однако анализ показывает отсутствие количественных моделей, на основе которых можно было бы решать задачи оптимизации учебного процесса.

В работах [7, 8] рассматриваются основы аналитической дидактики. Описываются теоретические положения и приводятся экспериментальные данные, на базе которых предлагается построение методов аналитического описания учебного процесса. Вводится понятие «силы дидактического воздействия», под которой понимается скорость изменения потока изучаемой информации и рассматриваются такие силы дидактического воздействия, как обучение, восприятие, забывание, умозаключение, заинтересованность и сопротивление. С использованием дифференциальных соотношений решается ряд практических примеров и делаются рекомендации, например, по распределению учебной нагрузки в течение заданного времени лекции или практического занятия и т.п.

Наиболее перспективными в смысле моделирования дидактических процессов являются работы [9, 10], в которых вводится в рассмотрение понятие оптимальной стратегии развития творческой личности, моделирование которой проводится в трех вариантах: путем подбора оптимальной эмпирической стратегии; путем формирования локально-оптимальной стратегии, отражающей деятельность развивающейся личности на основе ее целевой установки, и путем формирования глобально-оптимальной стратегии с использованием прогнозирования влияния текущей деятельности на весь последующий период развития. В качестве уровня мотивации, способствующего успешному приобретению квалификации, выступает время, затрачиваемое творческой личностью на приобретение своей квалификации.

В настоящей статье в отличие от вышерассмотренных работ в качестве предмета моделирования выступает процесс усвоения заранее структурированного учебного материала, представленного в виде определенного набора учебных элементов [11]. При этом в качестве фактора, развивающего мотивацию учащихся, рассматривается так называемая мотивационная составляющая учебной информации, измеряемая числом усвоенных учебных элементов и представляющая собой ряд специально подобранных задач и примеров из данной квалификационной области.

1. Модель усвоения учебного материала

Рассмотрим один из возможных подходов к построению модели усвоения учебного материала, основанный на применении современной теории управления [12, 20, 21]. С этой целью при разработке модели будем учитывать следующие основные свойства процесса усвоения:

- определенная часть учебной информации неизбежно забывается в силу несовершенства механизма человеческой памяти [13];
- имеет место отвлечение учащихся от учебного процесса, что также приводит к утрате части учебной информации [14];
- часть утраченной учебной информации может быть восстановлена за счет формирования умозаключений и регламентированной самостоятельной работы [15];
- процесс усвоения характеризуется свойствами инерционности и насыщения, что происходит по причинам психологического и физиологического характера [14];
- учебная информация содержит так называемую мотивационную составляющую, которая инициирует у учащихся определенный интерес к овладению изучаемым предметом [16].

Введем следующие обозначения: $\Delta Y_j(t)$ - объем усвоенной нормированной учебной информации за заданный промежуток времени Δt, измеряемый от момента начала трансляции учебного материала учащимся до момента квалиметрии; $\Delta Z_j(t)$ - объем транслируемой нормированной учебной информации за промежуток времени Δt; $\Delta M_j(t)$ - объем мотивационной составляющей нормированной учебной информации.

Под нормированным объемом учебной информации понимается отношение $\Delta Y^p{}_j(t)/\Delta Y^{cm}{}_j(t)$, где $\Delta Y^p{}_j(t)$ - реально усвоенный объем учебных элементов на момент времени *t*; $\Delta Y^{cm}{}_j(t)$ - объем учебных элементов, подлежащих усвоению в соответствии со стандартом обучения по данной дисциплине на тот же момент времени *t*.

Перечисленные выше величины определяются для *j*-го уровня учебных задач $\left(j=\overline{1,4}\right)$ в соответствии со структуризацией учебного материала, предложенной в [11]. С учетом введенных обозначений уравнения в конечных разностях баланса информации в дидактической системе для заданного промежутка времени Δt будут иметь вид:

$$\left.\begin{aligned}&\Delta Y_j(t)=k_1(1-a+b+g)_{ij}\Delta Z_j(t)-n_{ij}Y_j(t)\Delta t+n_{ij}M_j(t)\Delta t,\\&\Delta M_j(t)=k_2(1-a+b+g)_{ij}\Delta Z_j(t)-h_{ij}M_j(t)\Delta t,\\&k_1+k_2=1;\quad i=\overline{1,N};\quad j=\overline{1,4}.\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

Здесь коэффициенты a, b, g характеризуют соответственно объем теряемой учебной информации за счет отвлечения учащихся от процесса усвоения, а также прирост объема учебной информации за счет формирования умозаключений и регламентируемой самостоятельной работы; коэффициенты n и h характеризуют потери объемов учебной информации и ее мотивационной составляющей, вызванные несовершенством механизма человеческой памяти; коэффициенты a, b, g, n, h определяются для i-го момента квалиметрии и j-го уровня учебных задач; коэффициенты k_1 и k_2 определяют соотношение между объемом учебной информации, подлежащей усвоению, и объемом мотивационной составляющей учебной информации.

Таким образом, первое слагаемое в правой части первого уравнения в (1) представляет собой ту часть транслируемой учебной информации, которая может быть усвоена; второе слагаемое определяет потери информации, обусловленные забыванием, а третье слагаемое – пополнение учебной информации за счет мотивационной составляющей. В правой части второго уравнения в (1) первое слагаемое – мотивационная составляющая учебной информации, а второе слагаемое – ее потери, вызванные несовершенством механизма памяти.

Разделим левую и правую части первого уравнения из (1) на $n_{ij}\Delta t$, а второго уравнения – на $h_{ij}\Delta t$, перейдем к пределу при $\Delta t\to 0$ и в результате получим

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{n_{ij}}\frac{dY_j(t)}{dt}+Y_j(t)=k_1\frac{(1-a+b+g)_{ij}}{n_{ij}}\frac{dZ_j(t)}{dt}+M_j(t),\\&\frac{1}{h_{ij}}\frac{dM_j(t)}{dt}+M_j(t)=k_2\frac{(1-a+b+g)_{ij}}{h_{ij}}\frac{dZ_j(t)}{dt},\\&i=\overline{1,N};\quad j=\overline{1,4}.\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

Введем обозначения:

$$\frac{1}{n_{ij}}=2T_{ij}x_{ij};\quad \frac{1}{h_{ij}}=T_{M_{ij}};$$

$$k_1\frac{(1-a+b+g)_{ij}}{n_{ij}}=k_{ij};$$

$$k_2\frac{(1-a+b+g)_{ij}}{h_{ij}}=k_{ij}^M.$$

В результате (2) перепишется в виде

$$\left.\begin{aligned}&2T_{ij}x_{ij}\frac{dY_j(t)}{dt}+Y_j(t)=k_{ij}\frac{dZ_j(t)}{dt}+M_j(t),\\&T_{M_{ij}}\frac{dM_j(t)}{dt}+M_j(t)=k_{ij}^M\frac{dZ_j(t)}{dt},\\&i=\overline{1,N};\quad j=\overline{1,4}.\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

Учтем в полученной модели усвоения учебной информации важный аспект дидактического процесса, а именно, его инерционность. Для этого введем в первое уравнение (3) инерционный член, пропорциональный второй производной от функции усвоения:

$$\left.\begin{aligned}&T_{ij}^{\,2}\frac{d^2Y_j(t)}{dt^2}+2T_{ij}x_{ij}\frac{dY_j(t)}{dt}+Y_j(t)=k_{ij}\frac{dZ_j(t)}{dt}+M_j(t),\\&T_{M_{ij}}\frac{dM_j(t)}{dt}+M_j(t)=k_{ij}^M\frac{dZ_j(t)}{dt},\\&i=\overline{1,N};\quad j=\overline{1,4}.\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

Первое уравнение в (4) определяет нарастание объема усвоенной информации в зависимости от скорости трансляции $dZ_j(t)/dt$ учебного материала и мотивационной составляющей $M_j(t)$, а второе уравнение определяет нарастание объема усвоений мотивационной составляющей только в зависимости от скорости трансляции. Производная $dZ_j(t)/dt$ выступает в роли управляющей переменной. Если каким-либо способом эта величина может быть задана через переменные $Y_j(t)$, $dY_j(t)/dt$, $M_j(t)$, то система (4) становится замкнутой и совместной и может быть проинтегрирована при заданных начальных условиях.

Три потока циркулирующей информации: усваиваемая $Y_j(t)$, транслируемая $Z_j(t)$ и мотивационная $M_j(t)$ – находятся в определенном балансе и определяют суть процесса усвоения в дидактической системе.

Особо следует оговорить выделение из общего объема транслируемой учебной информации так называемой мотивационной составляющей. На основе современных представлений [17] «под мотивацией следует понимать генетическое стремление человека к самореализации в определенных видах деятельности в соответствии с его врожденными задатками - способностями». Это активное и устойчивое стремление реализуется в конкретные достижения, когда создаются необходимые условия. В этой связи будем считать, что весь объем учебной информации, транслируемой учащимся, должен содержать информацию, способствующую развитию генетического стремления человека к обучению по данной дисциплине. Например, специально подобранный лекционный материал, практические или лабораторные занятия, разработанные тестовые задачи и т.п. Важно отметить, что мотивационная составляющая учебной информации должна быть величиной измеримой, исчисляемой количеством учебных элементов.

Систему уравнений (4) назовем феноменологической моделью учебного процесса, поскольку она описывает прежде всего психический феномен усвоения учебного материала (по Ф. Брентано [18]).

Рассмотрим собственные свойства системы (4), положив вместо управляющей функции $dZ_j(t)/dt$ функцию Хевисайда $hev(t)$. В результате система (4) может быть проинтегрирована:

$$Y_j(t) = exp\left(-T_{ij}x_{ij}t\right)\left(C_1 + C_2 t\right) + k_{ij} + k_{ij}^M \times \times \left[1 - \frac{1}{\left(\frac{T_{ij}}{T_{M_{ij}}}\right)^2 + 2\left(\frac{T_{ij}}{T_{M_{ij}}}\right)x_{ij} + 1}\right] exp\left(-T_{M_{ij}}t\right), \quad (5)$$

где C_1 и C_2 - произвольные постоянные интегрирования. Это решение может быть проиллюстрировано графиком (рисунок 1), где по оси абсцисс отложено время обучения, изме-

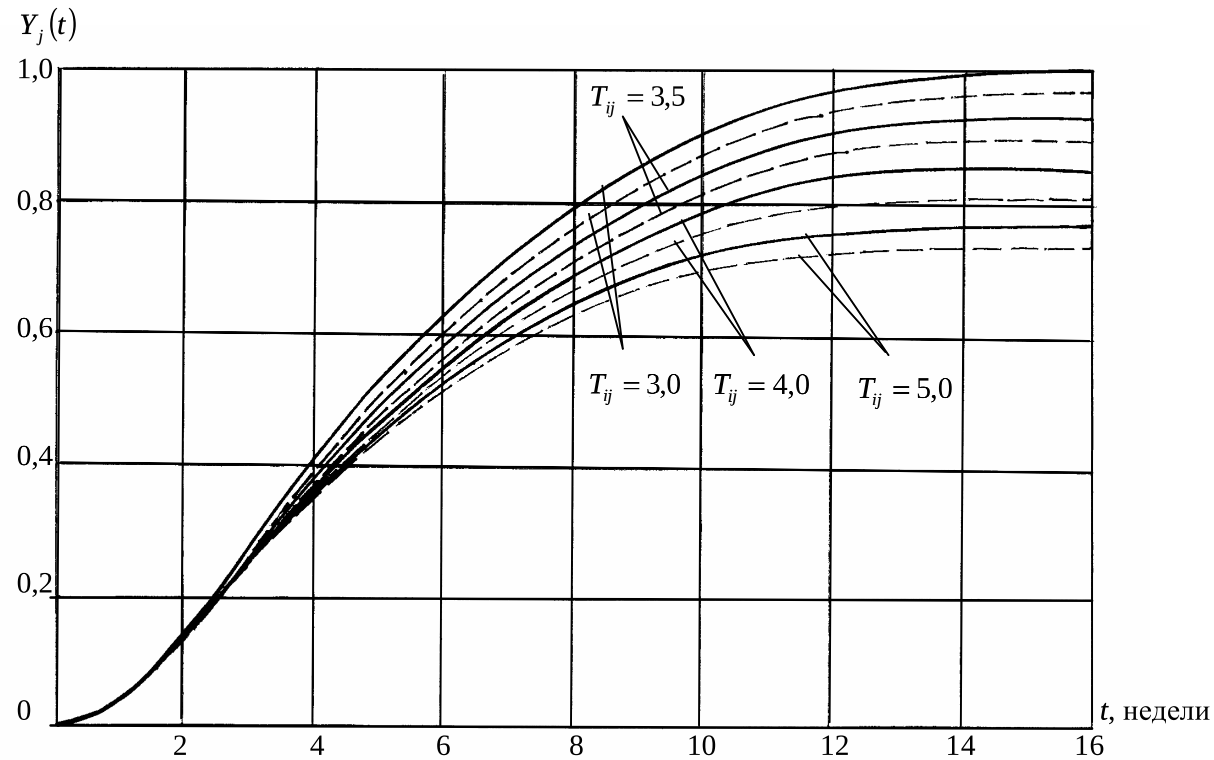

Рис. 1. Зависимость функции усвоения от времени для различных значений постоянной времени T_{ij} [ед. времени]

ряемое в условных единицах времени (в данном случае в неделях), а по оси ординат – нормированное число усвоенных учебных элементов, представленное в долях единицы. Таким образом, площадь под кривой функции усвоения представляет собой суммарное число учебных элементов, которые подлежат усвоению в течение, например, семестра в соответствии с имеющимся стандартом обучения по данной дисциплине:

$$\int_0^T Y(t)dt = J = const\,. \qquad (6)$$

При проектировании технологии обучения, опирающейся на вышеизложенные соображения, эта величина является заданной.

На рис. 1 представлены четыре пары кривых усвоения, соответствующие разным значениям постоянной времени T_{ij}. Остальные параметры системы (4) приняты следующими: $x_{ij} = 1$; $k_{ij} = 1{,}0$ [нормированные учебные элементы]; $k_{ij}^M = 0{,}05$ [нормированные учебные элементы]; $T_M = 10{,}0$ [ед. времени].

Из множества кривых усвоения $Y_j(t)$, получаемых при различных значениях параметров системы (4), можно определить такую, которая при $t = T$ будет иметь значение, равное единице: $Y_j(T) = 1$. Будем называть ее эталонной траекторией усвоения, поскольку площадь под такой кривой, выраженная произведением числа учебных элементов на время, будет соответствовать, согласно (6), стандарту обучения.

Например, по курсу линейной алгебры в высшем учебном заведении в соответствии с существующим ныне Государственным стандартом [19] общее число учебных элементов, согласно предложенной структуризации [11], по всем четырем уровням учебных задач будет составлять 750 …800. Таким образом, для данного курса это число учебных элементов в соответствии с рассматриваемой моделью усвоения учебного материала должно быть равновелико площади криволинейного треугольника, ограниченного снизу линией абсцисс, справа вертикальной прямой $t = T$, а сверху – кривой усвоения $Y_j(t)$ (рис. 1).

Уравнение эталонной траектории усвоения определяется соотношением (5) при следующих значениях параметров модели усвоения: $x_{ij} \equiv 1$ (рассматриваются только апериодические решения первого уравнения (4)); $T_{ij} = T_{ij}^*$, где постоянная времени T_{ij}^* определяется из решения трансцендентного уравнения вида:

$$(C_1 + C_2 T)\,exp\left(-T_{ij}^* \cdot T\right) + k_{ij} + k_{ij}^M \times$$
$$\times \left[1 - \frac{1}{\left(\dfrac{T_{ij}^*}{T_{M_{ij}}}\right)^2 + 2\left(\dfrac{T_{ij}^*}{T_{M_{ij}}}\right)x_{ij} + 1}\right] exp\left(-T_{M_{ij}} T\right) = 1. \qquad (7)$$

2. Определение внешней поддержки познавательной деятельности

Под внешней поддержкой познавательной деятельности будем понимать дополнительную трансляцию или проработку учебного материала, которую требуется осуществить в случае, когда по результатам квалиметрии (тестирования) реальная кривая усвоения учебного материала для учащегося расположена ниже эталонной траектории. Это означает, что учащимся не усвоена определенная часть учебной информации и требуется внешняя поддержка. Она может быть реализована на лекциях, при проведении практических занятий и лабораторных работ, в ходе индивидуальных занятий, при самостоятельной работе учащегося с обучающими компьютерными программами и т. п.

В модели усвоения (4) внешняя поддержка выражается функцией трансляции $Z_j(t)$, $j = \overline{1{,}4}$, отвечающей j-му уровню учебных задач в соответствии с принятой структуризацией учебного материала [11]. Если кривая усвоения учащегося не отличается от эталонной траектории, то $Z_j(t) \equiv 0$.

Рассмотрим алгоритм определения внешней поддержки в виде функции трансляции $Z_j(t)$, предполагая при этом, что система (4) относится к классу управляемых динамических систем [20]. Третий порядок системы (4) позволяет выполнить преобразования аналитически. Преобразуем (4) к стандартной векторно-матричной форме, рассматривая при этом функцию $dZ_j(t)/dt$ как управление. Для простоты дальнейших рассуждений опустим в (4) индексы *i* и *j* и введем следующие обозначения:

$$a = \frac{2x}{T}; \quad c = \frac{1}{T^2}; \quad d = \frac{k}{T^2}; \quad e = \frac{1}{T_M};$$

$$f = \frac{k^M}{T_M}; \quad \overline{X}(t) = [Y(t), \quad V(t), \quad M(t)]^T.$$

Тогда система (4) может быть записана в виде

$$\dot{\overline{X}} = A\overline{X}(t) + \overline{b}U(t), \tag{8}$$

где матрица *A* и вектор-столбец $\overline{b}$ равны:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -c & -a & c \\ 0 & 0 & -e \end{bmatrix}; \quad \overline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ d \\ f \end{bmatrix}.$$

Скаляр $U(t)$ в данном случае равен

$$U(t) = \frac{dZ(t)}{dt}. \tag{9}$$

По терминологии [7] эта величина называется силой дидактического воздействия, а по физическому смыслу она представляет собой скорость трансляции учебного материала и измеряется числом транслируемых учебных элементов в единицу времени.

Покажем, что система (8) является управляемой, а значит может быть замкнута линейной обратной связью по состоянию вида

$$U(t) = P\overline{X}(t), \tag{10}$$

где $P = [p_1, \quad p_2, \quad p_3]$ - вектор-строка коэффициентов модального управления [21]. В этом случае линейная обратная связь (10) обеспечивает системе (8) требуемые динамические свойства, в частности, реализацию эталонной траектории усвоения.

Для доказательства управляемости системы (8) необходимо вычислить ранг матрицы управляемости и показать, что он равен порядку системы. Элементарные вычисления показывают, что

$$Rank[\overline{b}, \quad A\overline{b}, \quad A^2\overline{b}] =$$

$$= Rank\begin{bmatrix} 0 & d & cf - ad \\ d & cf - ad & (a^2 - c)d + cf(e - a) \\ f & ef & e^2 f \end{bmatrix} = 3$$

и, следовательно, система является управляемой.

Линейную обратную связь (10) по состоянию будем отыскивать из условия принадлежности спектра полюсов замкнутой системы (8, 10) требуемому спектру полюсов, определяющему в пространстве фазовых координат системы эталонную траекторию усвоения:

$$\underset{s}{Spec}(A - \overline{b}p) \setminus \underset{s}{Spec}(A_0 - \overline{b}_0 p_0) = \varnothing.$$

Здесь матрица *A*, вектор-столбец $\overline{b}$ и вектор-строка *p* принадлежат исходной системе, а тройка A_0, $\overline{b}_0$, p_0 - системе, реализующей эталонную траекторию усвоения (далее такую систему будем называть эталонной).

Спектры эталонной и исходной систем определяются из соответствующих характеристических уравнений на основе предварительного использования преобразований Лапласа [20]. Характеристическое уравнение для системы (4) имеет вид:

$$T_M T^2 S^3 + (2T_M Tx + T^2)S^2 +$$
$$+ (T_M + 2Tx)S + 1 = 0.$$

После почленного деления на $T_M T^2$ получим

$$S^3 + \frac{2T_M T x + T^2}{T_M T^2} S^2 + \frac{T_M + 2Tx}{T_M T^2} S + \frac{1}{T_M T^2} = 0 .$$

Непосредственно отсюда получаются искомые коэффициенты характеристического уравнения исходной системы:

$$f_1 = \frac{2T_M T x + T^2}{T_M T^2}; \; f_2 = \frac{T_M + 2Tx}{T_M T^2}; \\ f_3 = \frac{1}{T_M T^2}. \tag{11}$$

Для эталонной системы коэффициенты характеристического уравнения будут отличаться только значением постоянной времени T, которое предварительно вычисляется из решения трансцендентного уравнения (7). Таким образом, окончательно будем иметь

$$h_1 = \frac{2T_M T^* x + T^{*2}}{T_M T^{*2}}; h_2 = \frac{T_M + 2T^* x}{T_M T^{*2}}; \\ h_3 = \frac{1}{T_M T^{*2}}. \tag{12}$$

В соответствии с основными положениями модального управления [12, 21] внешнюю поддержку в системе (4) будем искать вначале в каноническом базисе, в котором пары $\{A, \;\; \bar{b}\}$ и $\{A_0, \;\; \bar{b}_0\}$ записываются в форме Фрабениуса. При этом соотношение для определения модального управления в каноническом базисе приобретает вид:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -f_3 & -f_2 & -f_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{P}_1 & \tilde{P}_2 & \tilde{P}_3 \end{bmatrix} = \\ + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -h_3 & -h_2 & -h_1 \end{bmatrix}, \tag{13}$$

где $\tilde{P}_k, \;\; k = \overline{1,3}$ - коэффициенты модального управления в каноническом базисе, а элементы f_k и $h_k, \;\; k = \overline{1,3}$ фрабениусовых матриц определяются соотношениями (11) и (12).

Непосредственно из (13) получаем

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{P}_1 = h_3 - f_3 \\ \tilde{P}_2 = h_2 - f_2 \\ \tilde{P}_3 = h_1 - f_1 \end{array} \right\}. \tag{14}$$

Для перехода из канонического базиса к исходному при определении модального управления необходимо использовать соотношение

$$P = \tilde{P} T , \tag{15}$$

где T – канонизирующая матрица, определяемая формулой

$$T = \left[\tilde{b}, \;\; \tilde{A}\tilde{b}, \;\; \tilde{A}^2\tilde{b}\right]\left[\bar{b}, \;\; A\bar{b}, \;\; A^2\bar{b}\right]^{-1}. \tag{16}$$

Здесь матрица $\tilde{A}$ и вектор-столбец $\tilde{b}$ записаны в форме Фрабениуса, а матрица A и вектор-столбец $\bar{b}$ – в исходном виде.

Вычисление канонизирующей матрицы T приводит к следующему выражению:

$$T = \frac{1}{detU} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -f_1 \\ 1 & -f_1 & f_1^2 - f_2 \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} (cf-ad)e^2 f - ef[(a^2-c)d + cf(e-a)] & ef(cf-ad) - de^2 f & d[(a^2-c)d + cf(e-a)] - (cf-ad)^2 \\ f[(a^2-c)d + cf(e-a)] - de^2 f & -f(cf-ad) & d(cf-ad) \\ def - f(cf-ad) & df & d^2 \end{bmatrix}, \tag{17}$$

где

$$detU = df\left[(a^2 - c)d - cf(e+a)\right] - \\ - def(cf - ad) - f(cf - ad)^2 - d^2 e^2 f^2 .$$

Полагая, что в конечном виде матрица T будет иметь вид

$$T = \begin{Bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{Bmatrix}, \tag{18}$$

и ее элементы вычисляются на основе матричных умножений в (17), запишем модальное управление для системы (8) в исходном базисе. Для этого выполним матричное умножение (15), используя (14) и (18). В результате будем иметь

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= (h_3 - f_3)T_{11} + (h_2 - f_2)T_{21} + (h_1 - f_1)T_{31}, \\ P_2 &= (h_3 - f_3)T_{12} + (h_2 - f_2)T_{22} + (h_1 - f_1)T_{32}, \\ P_3 &= (h_3 - f_3)T_{13} + (h_2 - f_2)T_{23} + (h_1 - f_1)T_{33}. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Полученное модальное управление в исходном базисе позволяет отыскать собственно внешнюю поддержку в системе (8) или, что то же самое, в системе (4) путем вычисления функции скорости трансляции:

$$\frac{dZ(t)}{dt} = P_1 Y(t) + P_2 V(t) + P_3 M(t). \tag{20}$$

Интегрируя (20) в пределах от нуля до T - конечного времени процесса усвоения, получим

$$Z(t) = P_1 \int_0^T Y(t)dt + P_2 Y(t) + P_3 \int_0^T M(t)dt. \tag{21}$$

Полученное выражение определяет функцию внешней поддержки на интервале усвоения $[0,\ T]$ и показывает, какое число учебных элементов на данном интервале должно быть проработано с результатом усвоения, чтобы реальная траектория усвоения учащегося совпадала с эталонной.

Приведем пример определения внешней поддержки. Пусть эталонная траектория усвоения определяется следующими параметрами: T = 3,0 ед. времени; $x = 1{,}0$, k = 1,0, $k^M = 0{,}05$ – нормированные учебные элементы; $T_M = 10{,}0$ ед. времени.

В таблице 1 представлены расчеты коэффициентов характеристического уравнения системы (4) для эталонной траектории усвоения. В таблице 2 представлены коэффициенты характеристических уравнений системы для трех значений постоянной времени T = 3,5; 4,0; 5,0, которые соответствуют процессу усвоения, отличному от эталонного, и коэффициенты модального управления.

Результаты расчета функции внешней поддержки $Z(t)$ для соответствующих кривых усвоения, отличных от эталонной траектории, представлены на рисунке 2.

Проанализируем полученные результаты с точки зрения «затрат» внешней поддержки учебного процесса. Для этой цели сравним ординаты кривых усвоения (рис. 1) и кривых функции внешней поддержки (рис. 2) для одного и того же момента времени. Возьмем в качестве примера шестую неделю обучения. Результаты квалиметрии для этого момента времени показывают, что если учащийся находится на кривой усвоения с постоянной времени T = 3,5 ед. времени, то его

Таблица 1

T = 3,0		
h_1	h_2	h_3
0,767	0,178	0,011

Таблица 2

T = 3.5			T = 4.0			T = 5.0		
f_1	f_2	f_3	f_1	f_2	f_3	f_1	f_2	f_3
0,671	0,139	0,008	0,600	0,113	0,006	0,500	0,080	0,004
P_1	P_2	P_3	P_1	P_2	P_3	P_1	P_2	P_3
0,375	1,253	0,015	0,744	2,683	0,076	1,753	6,754	0,131

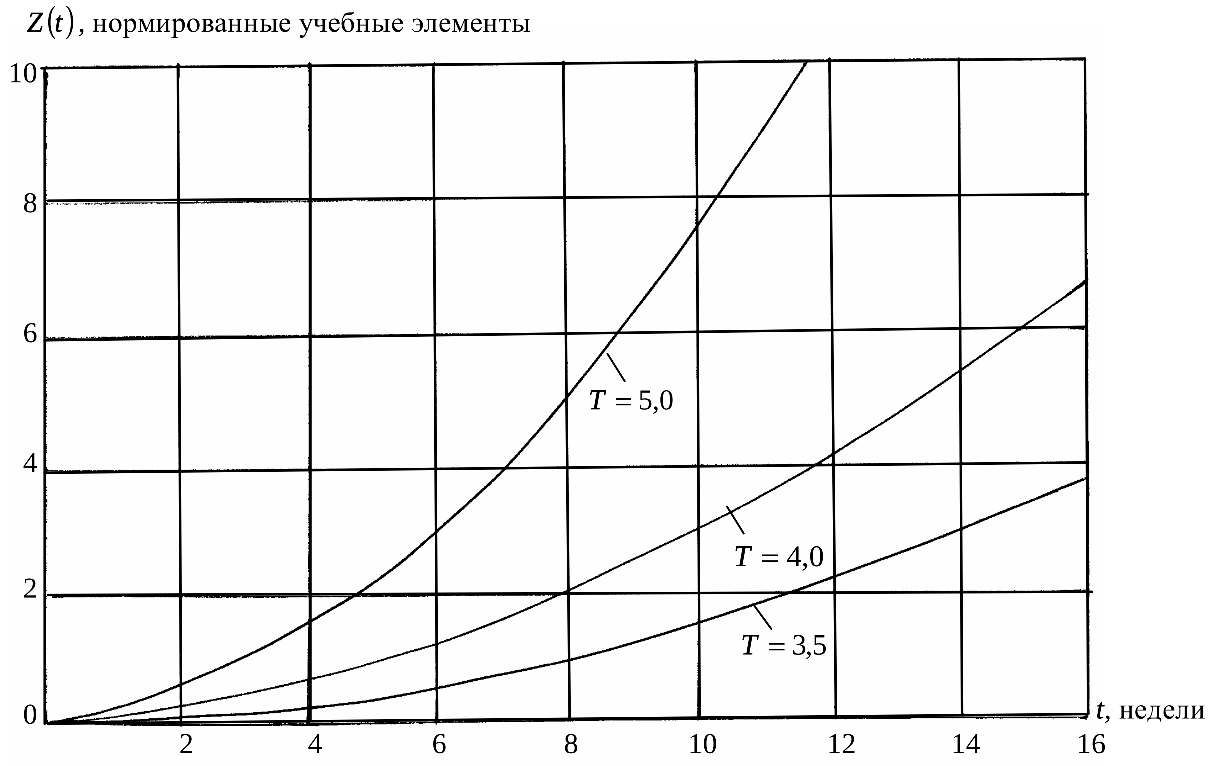

Рис. 2. Зависимость функции внешней поддержки учебного процесса от времени для трех кривых усвоения, отличных от эталонной траектории усвоения

отставание в нормированных учебных элементах составляет (рис. 1):

$$\Delta Y(t = 6\,\text{нед.}) = Y(t = 6\,\text{нед.},\ T = 3{,}0\ \text{ед.вр.}) - $$
$$- Y(t = 6\,\text{нед.},\ T = 3{,}5\,\text{ед.вр.}) = 0{,}05.$$

Этой величине отставания соответствует внешняя поддержка (рис. 2):

$$Z(t = 6\,\text{нед.},\ T = 3{,}5\ \text{ед.вр.}) = 0{,}40\,.$$

Отсюда следует, что если, например, не усвоено пять задач из шестидесяти, предъявленных на тестирование (~8 %), то объем дополнительной проработки неусвоенного материала должен составить в восемь раз большую величину, то есть 0,4 нормированных учебных элементов. Полученный результат подчеркивает в принципе всю сложность задачи по успешному усвоению учебного материала.

В частности, наложение графиков рисунков 1 и 2, например, для T = 3,5 ед. времени показывает (рисунок 3), что эффективная внешняя поддержка учебного процесса целесообразна именно в первой половине учебного периода (семестра), поскольку далее в рассматриваемом случае после восьмой недели внешняя поддержка по своему объему становится чрезмерной и практически невыполнимой.

3. Технология обучения, ориентированная на персонализацию учебного процесса

Модель усвоения учебного материала в форме (4), (8) и процедура определения внешней поддержки познавательной деятельности (10) – (21) позволяют очертить круг вопросов технологии обучения, ориентированной на персонализацию учебного процесса.

Первый вопрос, который должен быть решен в рамках этой технологии, это формирование персональной (индивидуальной) модели усвоения каждого учащегося путем определения коэффициентов a, b, g и n, отвечающих за потери учебной информации и за ее частичное восстановление.

Определение этих коэффициентов должно быть выполнено в результате использования специальных психологических компьютерных тестов перед началом учебного процесса по данной дисциплине. К подобным тестам можно отнести хорошо известные тесты Раша Г. [22, 23]. Второй вопрос – это оп-

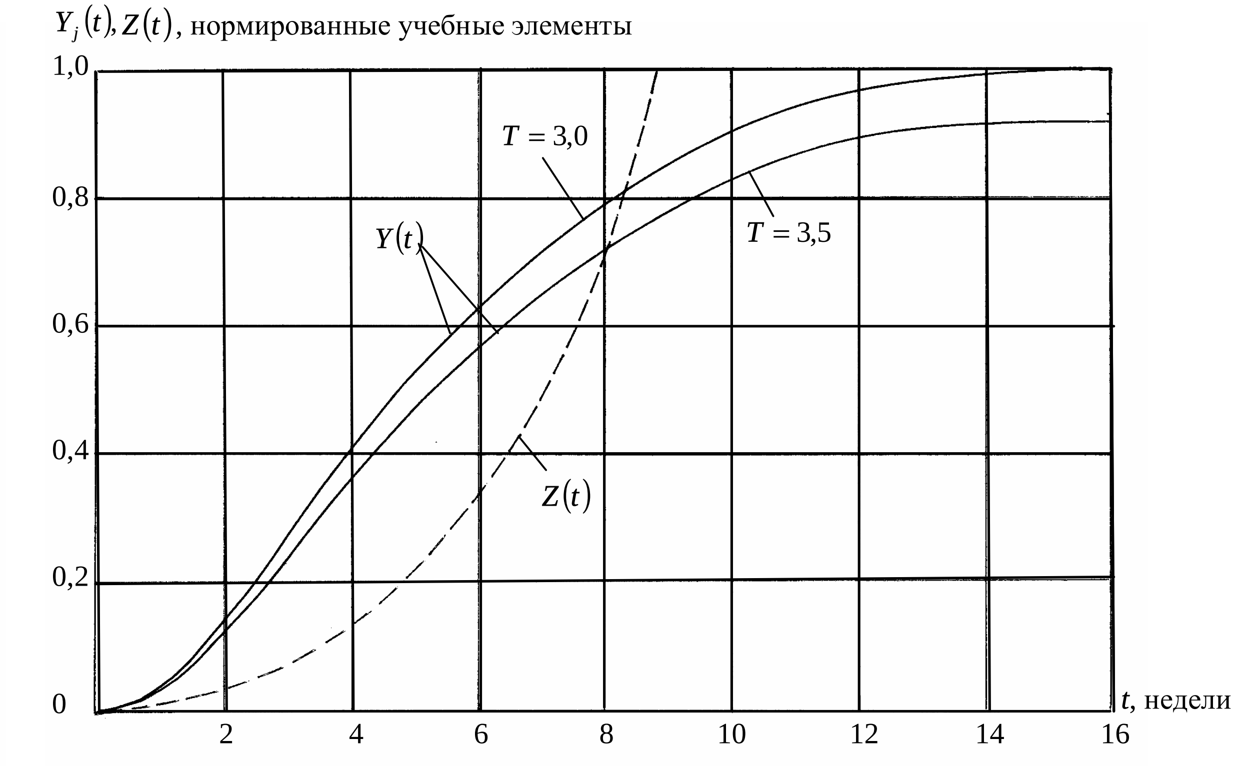

Рис. 3. Иллюстрация внешней поддержки в учебном процессе

ределение соотношения между объемом основного учебного материала дисциплины и объемом его мотивационной составляющей (коэффициенты k_1 и k_2 в (1)). Практика показывает, что для дисциплин математического цикла соотношение между этими объемами составляет приблизительно величину $\frac{k_2}{k_1} = 0{,}10...0{,}25$. Наоборот, для дисциплин общепрофессионального и специального циклов это соотношение может быть существенно иным: $\frac{k_2}{k_1} = 0{,}65...1{,}00$.

Следующий важный вопрос рассматриваемой технологии состоит в определении фактической траектории усвоения, персонализированной по каждому учащемуся. Предлагается проведение тестирования текущей успеваемости учащихся по структурированным заранее уровням учебных задач в соответствии с предложенной в [11] познавательно-деятельностной матрицей учебного процесса. При этом схема усвоения задач для каждого j-го уровня ($j = \overline{1,4}$) будет различной. Для наиболее простых задач 1-го уровня схема усвоения определится следующей формулой: $Y_{11} \to Y_{21} \to Y_{31} \to Y_{41}$ (рис. 4).

Таким образом, при решении тестовых задач этого уровня учащийся последовательно должен проходить по элементам yd - матрицы следующие этапы: отражение $\to$ осмысление $\to$ алгоритмирование $\to$ контролирование.

Схема усвоения тестовых задач 2-го уровня будет определяться формулой $Y_{11} \to Y_{12} \to Y_{21} \to Y_{22} \to Y_{31} \to Y_{32} \to Y_{41} \to Y_{42}$. Этапы, которые будет проходить учащийся по элементам yd - матрицы: отражение на уровне узнавания $\to$ отражение на уровне воспроизведения $\to$ осмысление на уровне узнавания $\to$ осмысление на уровне воспроизведения $\to$ алгоритмирование на уровне узнавания $\to$ алгоритмирование на уровне воспроизведения $\to$ контролирование на уровне узнавания $\to$ контролирование на уровне воспроизведения.

Схемы усвоения более сложных задач 3-го и 4-го уровней являются аналогичными. Для 3-го уровня: $Y_{11} \to Y_{12} \to Y_{13} \to Y_{21} \to Y_{22} \to Y_{23} \to \ldots$; а для 4-го уровня: $Y_{11} \to Y_{12} \to Y_{13} \to Y_{14} \to Y_{21} \to Y_{22} \to Y_{23} \to Y_{24} \to Y_{31} \ldots$.

	Узнавание	Воспроизведение	Применение	Творчество
Отражение	Y_{11}	Y_{12}	Y_{13}	Y_{14}
Осмысление	Y_{21}	Y_{22}	Y_{23}	Y_{24}
Алгоритмирование	Y_{31}	Y_{32}	Y_{33}	Y_{34}
Контролирование	Y_{41}	Y_{42}	Y_{43}	Y_{44}

Рис. 4. Решение тестовых задач 1-го и 2-го уровней

Тестирование текущей успеваемости учащихся предлагается проводить в моменты t_i, $i=\overline{1,N}$, которые назовем моментами квалиметрии. Для приближенного определения фактической траектории усвоения в принципе достаточно двух моментов t_i, t_{i+1}.

Для этих моментов определяется фактически усвоенное число нормированных учебных элементов $Y_{ij}(t)$ и соответствующее число усвоенных нормированных учебных элементов мотивационной составляющей $M_{ij}(t)$. Важно отметить, что эти величины определяются для j-го уровня задач, предъявленных в виде тестов. В результате для t_1 и t_2 будем иметь следующие значения переменных состояния системы (4):

$$Y_{1j}(t_1),\quad Y_{2j}(t_2),\quad M_{1j}(t_1),\quad M_{2j}(t_2),$$
$$\Delta Y_{1j}(t_1)=Y_{1j}(t_1);\quad \Delta Y_{2j}(t_2)=Y_{2j}(t_2)-Y_{1j}(t_1);$$
$$\frac{\Delta Y_{1j}(t_1)}{\Delta t}\cong\frac{dY_{1j}(t_1)}{dt};\quad \frac{\Delta Y_{2j}(t_2)}{\Delta t}\cong\frac{dY_{2j}(t_2)}{dt}.$$

Полученные величины $Y_{1j}(t_1)$, $Y_{2j}(t_2)$, $M_{1j}(t_1)$, $M_{2j}(t_2)$ используются в компьютерной программе аппроксимации по методу наименьших квадратов на заданном классе функции для определения фактической траектории усвоения. Для аппроксимации кривой усвоения $Y_{ij}(t)$ используется решение (5), а для аппроксимации $M_{ij}(t)$ используется возрастающая экспонента. Варьируемыми параметрами аппроксимации выступают постоянные времени T_{ij} и T_{Mij} (рис. 5).

Необходимо отметить, что в результате квалиметрии выявляется как количественная сторона процесса усвоения, так и качественная, поскольку по результатам решения задач j-го уровня, предъявленных в виде тестов, ясно, какие учебные элементы из yd - матрицы не усвоены. Процедура определения внешней поддержки познавательной деятельности (10) – (21), используя величины $Y_{2j}(t_2)$, $\frac{dY_{2j}(t_2)}{dt}$, $M_{2j}(t_2)$, позволяет установить требуемый уровень поддержки $Z(t)$, который должен действовать на интервале $[t_2, t_3]$, то есть до момента t_3 новой квалиметрии. Далее процесс повторяется.

Таким образом, предлагаемая технология обучения представляет собой многошаговую процедуру периодической квалиметрии текущей успеваемости учащихся и соответствующей измеренному отставанию оперативной корректировке учебного процесса путем вычисления внешней поддержки, не-

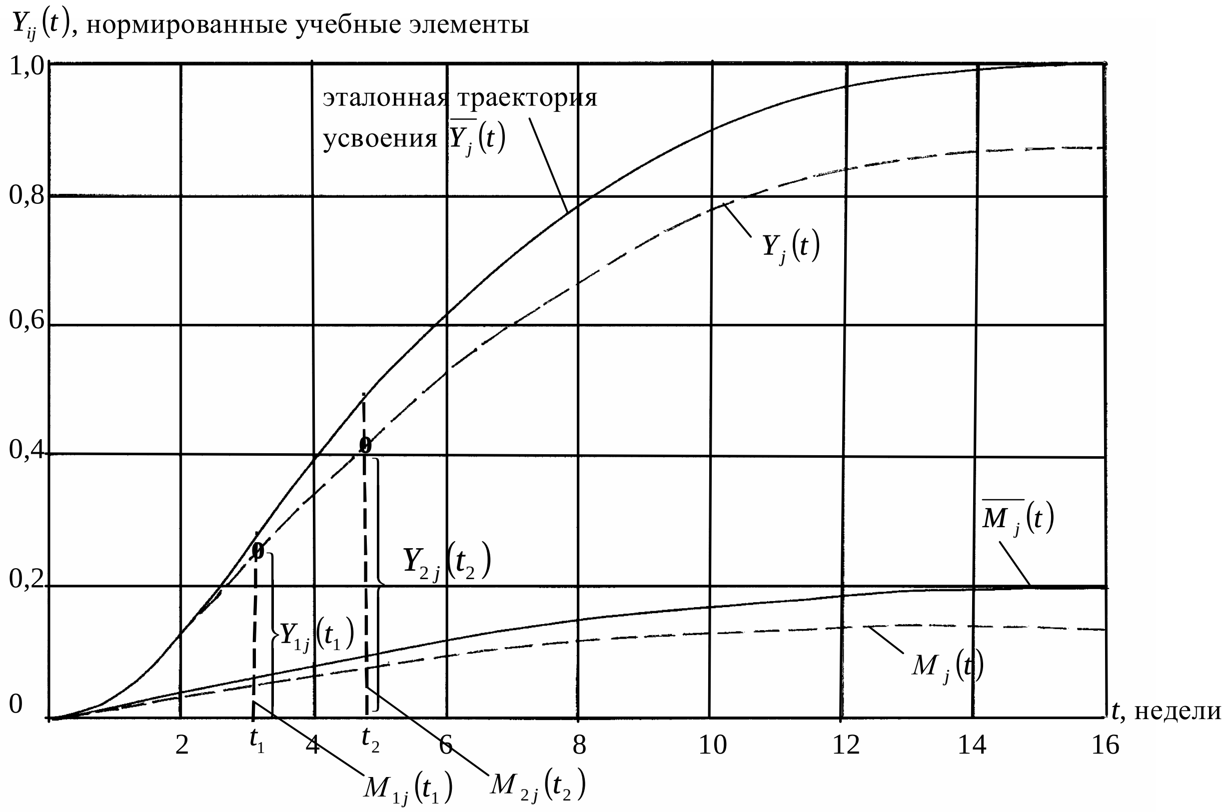

Рис. 5. Аппроксимация кривых $Y_{ij}(t)$ и $M_{ij}(t)$: $\overline{Y}_j(t)$, $\overline{M}_j(t)$ – эталонная траектория усвоения; t_1 и t_2 – моменты квалиметрии; $Y_j(t)$, $M_j(t)$ - фактическая траектория усвоения

обходимого для дополнительного изучения числа учебных элементов с тем, чтобы фактическая траектория усвоения учащегося стремилась бы к эталонной.

Список литературы

1. Ительсон Л. Б. Математические и кибернетические методы в педагогике. – М.: Педагогика, 1964. – 248 с.

2. Frank H. Die Kibernetische Grundlagen der Padagogik. – Berlin: Padagogik, 1963.

3. Буш Р., Мостеллер Ф. Стохастические модели обучаемости. – М.: Физматгиз, 1962. – 483 с.

4. Аткинсон Р., Бауэр Г., Кротерс Э. Введение в математическую теорию обучения. – М.: Мир, 1969. – 487 с.

5. Lloyd D. Communication in the University Lecture / Univ. Reading Staff J. 1967. Vol. 1. p.14-22.

6. Леонтьев Л. П., Гохман О. Г. Проблемы управления учебным процессом: математические модели. – Рига: Изд-во РГУ, 1984. – 239 с.

7. Потеев М. И. Основы аналитической дидактики: учебное пособие. – Санкт-Петербург: Изд-во ИТМО, 1992. – 167 с.

8. Потев М. И. Практикум по методике обучения во втузах. – М.: Высшая школа, 1990. – 94 с.

9. Пиявский С. А. Математическое моделирование управляемого развития научных способностей // Известия РАН, серия «Теория и системы управления». – 2000, №3. – С.100-106.

10. Пиявский С. А. Оптимальное управление развитием научных способностей школьников и студентов. – Самара: Изд-во СамГАСА, 1998. – 164 с.

11. Рябинова Е. Н., Титов Б. А. Построение познавательно-деятельностной матрицы учебного процесса // Вестник СГАУ. – Самара: Изд-во ИПУ СГАУ, 2004. № 1 (5). – С. 153-158.

12. Андреев Ю. Н. Управление конечномерными линейными объектами. – М.: Наука, 1976. – 424 с.

13. Аткинсон Р. Человеческая память и процесс обучения. – М.: Прогресс, 1980. – 528с.

14. Рябинова Е. Н., Титов Б. А. Формирование учебной нагрузки в процессе обучения // Сборник трудов Всероссийской научно-методической конференции «Системный подход к обеспечению качества высшего образования»». - Тольятти: Изд-во ТолПИ, 2000. – С.130-137.

15. Рябинова Е. Н., Титов Б. А. К построению модели обучения с повторением изучаемого материала // Межвузовский сборник научных трудов «Наука, техника, образование г. Тольятти и Волжского региона». Ч. 1. - Тольятти: Изд-во ТолПИ, 2000. – С.73-75.

16. Рябинова Е. Н., Титов Б. А. О мотивации учебной деятельности // Материалы Всероссийской научно-практической конференции «Управление качеством образования в вузах». - Самара, СамГТУ. – Самара: Изд-во СамГТУ, 2003. – С.128-130.

17. Беспалько В. П. Образование и обучение с участием компьютеров (педагогика третьего тысячелетия). – М.: Изд-во Московского психолого-социального института; Воронеж: Изд-во НПО «МОДЭК», 2002. – 352 с.

18. Словарь иностранных слов и выражений / Авт.-сост. Е. С. Зенович. – М.: ООО «Агентство «КРПА «Олимп»: ООО «Издательство АСТ», 2002. – 778 [6] с.

19. Государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования www.edu.ru/db/portal/spe/index.htm.

20. Цыпкин Я. З. Основы теории автоматических систем. – М.: Наука, 1977. – 560 с.

21. Кузовков Н. Т. Модальное управление и наблюдающие устройства. – М.: Машиностроение, 1976. – 184 с.

22. Rash G. On Specific Objectivity. In: Danish Jear-Book or Philosophy. 1977. v 14. P.58-94.

23. Rash G. Probabilistic Model for Some Intelligence and Attainment Tests. Chicago. 1980. – 199 p.