

## ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ ГИПЕРЗВУКОВОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА НА ЭТАПЕ РАЗГОНА-НАБОРА ВЫСОТЫ В АТМОСФЕРЕ

© 2007 А. А. Бебяков

Самарский государственный аэрокосмический университет

Методом принципа максимума решается задача оптимального управления движением центра масс гиперзвукового летательного аппарата (ГЛА) из условия минимума расхода топлива.

### Постановка задачи оптимизации

Постановка рассматривается в форме вариационной задачи Майера [1]. За критерий оптимизации принято количество израсходованного топлива  $m_T$  на активном участке полета, выражаемое функционалом

$$m_T = m(t_k) - m(t_n), \quad (1)$$

где  $m$  - масса ГЛА;  $t_n, t_k$  - моменты времени начала и окончания движения, соответственно.

Движение ГЛА моделируется как невозмущенное движение материальной точки в вертикальной плоскости с постоянным и максимальным расходом топлива.

Система дифференциальных уравнений, описывающих движение центра масс, имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{h} &= \frac{I_{уд}(h, M)b}{m} \cos a - C_{xa}(a, M) \frac{r(h)V^2}{2m} S - g \sin q, \\ \dot{q} &= \frac{1}{V} \left( \frac{I_{уд}(h, M)b}{m} \sin a + C_{ya}(a, M) \frac{r(h)V^2}{2m} S - g \cos q \right) + \\ &\quad + \frac{V \cos q}{R+h}, \\ \dot{m} &= V \sin q, \\ \dot{a} &= -b, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $V$  - скорость,  $q$  - угол наклона траектории,  $h$  - высота полета,  $a$  - угол атаки,  $b$  - расход топлива,  $M$  - число Маха,  $r$  - плотность атмосферы,  $S$  - характерная площадь,

$g$  - ускорение свободного падения,  $R$  - радиус Земли,  $I_{уд}$  - удельный импульс,  $C_{xa}, C_{ya}$  - коэффициенты силы лобового сопротивления и аэродинамической подъемной силы, соответственно.

Граничные условия движения записываются в виде

$$\begin{aligned} t = t_n : V &= M_n \cdot a(h_n), \quad q = q_n, \quad h = h_n, \quad m = m_n; \\ t = t_k : V &= M_k \cdot a(h_k), \quad q = q_k, \quad h = h_k, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $M_n, M_k, q_n, q_k, h_n, h_k, m_n$  - заданные числа,  $a$  - скорость звука.

В качестве функции управления принята зависимость угла атаки от времени с ограничениями вида

$$a_{\min} \leq a(t) \leq a_{\max}. \quad (4)$$

**Физическая постановка:** требуется определить управление углом атаки, обеспечивающее минимальные затраты топлива при движении ГЛА на этапе разгона-набора высоты.

**Математическая постановка:** требуется определить программу управления  $a(t)$  с ограничениями (4) для системы уравнений (2) с граничными условиями (3), доставляющую минимум функционалу (1).

### Постановка краевой задачи

Для решения поставленной задачи применяется принцип максимума Понтрягина.

Функция Гамильтона  $H$  для системы (2) имеет вид

$$H = y_v \left[ \frac{I_{yd} b}{m} \cos a - C_{xa} \frac{rV^2}{2m} S - g \sin q \right] + \\ + \frac{y_q}{V} \left[ \frac{I_{ya} b}{m} \sin a + C_{ya} \frac{rV^2}{2m} S - g \cos q + \frac{V^2 \cos q}{R+h} \right] + \\ + y_h V \sin q - y_m b,$$

где  $y_v, y_q, y_h, y_m$  - сопряженные переменные, соответствующие фазовым координатам системы (2).

Согласно принципу максимума, необходимыми условиями минимума функционала (1) являются:

- условие максимума функции  $H$  по заданному управлению на заданном промежутке времени

$$H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{a}) = \max_{\mathbf{a} \in A} H, \quad t \in [t_n, t_k], \quad (5)$$

где  $\mathbf{x} = \{V, q, h, m\}$  - вектор фазовых координат или вектор состояния ГЛА;  $\boldsymbol{\psi} = \{y_v, y_q, y_h, y_m\}$  - вектор сопряженных переменных;  $A$  - область определения управления, задаваемая (4);

- условие трансверсальности в начальный и конечный моменты времени

$$[\boldsymbol{\psi} d\mathbf{x} - d\mathbf{m} - H dt]_{t_n}^k = 0. \quad (6)$$

Система дифференциальных уравнений для сопряженных переменных имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{y}_v &= -y_v \left[ \frac{\partial I_{yd}}{\partial M} \frac{b}{ma} \cos a - \left( \frac{\partial C_{xa}}{\partial M} \frac{V}{a} + 2C_{xa} \right) \frac{rV}{2m} S \right] + \\ &+ y_q \left( \frac{I_{ya}}{V} - \frac{\partial I_{ya}}{\partial M} \right) \frac{b}{Vma} \sin a - \\ &- y_q \left[ \left( \frac{\partial C_{xa}}{\partial M} \frac{V}{a} + C_{ya} \right) \frac{rS}{2m} + \frac{\cos q}{R+h} \right] - y_h \sin q; \\ \dot{y}_q &= y_v g \cos q + y_q \left( \frac{V}{R+h} - \frac{g}{V} \right) \sin q - y_h V \cos q; \\ \dot{y}_h &= -y_v \left[ \left( \frac{\partial I_{yd}}{\partial h} - \frac{\partial I_{yd}}{\partial M} \frac{\partial a}{\partial h} \frac{V}{a^2} \right) \frac{b}{m} \cos a + \left( \frac{\partial C_{xa}}{\partial M} \frac{\partial a}{\partial h} \frac{V}{a^2} r - \frac{\partial r}{\partial h} C_{xa} \right) \frac{V^2 S}{2m} \right] - \\ &- y_q \left[ \left( \frac{\partial I_{ya}}{\partial h} - \frac{\partial I_{ya}}{\partial M} \frac{\partial a}{\partial h} \frac{V}{a^2} \right) \frac{b}{Vma} \sin a - \left( \frac{\partial C_{xa}}{\partial h} \frac{\partial a}{\partial h} \frac{V}{a^2} r - \frac{\partial r}{\partial h} C_{ya} \right) \frac{VS}{2m} - \frac{V \cos q}{(R+h)^2} \right]; \\ \dot{y}_m &= \frac{y_v}{m^2} \left( I_{ya} b \cos a - C_{xa} \frac{rV^2}{2} S \right) + \frac{y_q}{m^2 V} \left( I_{ya} b \sin a + C_{ya} \frac{rV^2}{2} S \right) \end{aligned} \quad (7)$$

Условие трансверсальности (6) в начальный момент времени выполняется автоматически, так как начальные значения фазовых координат и момент времени  $t_n$  заданы. Для конечного момента времени  $t_k$  из (6) с учетом (3) определяются: граничное условие для системы (7)

$$y_{mk} = 1, \quad (8)$$

а также значение функции Гамильтона в конце траектории

$$H_k = 0. \quad (9)$$

Область определения управления по каналу угла атаки

$$-2^\circ \leq a \leq 10^\circ.$$

В этом случае (вследствие малых углов атаки) при расчетах используются приближения

$$\sin a \approx a, \quad \cos a \approx 1 - a^2/2. \quad (10)$$

Необходимое условие экстремума функции  $H$  по управлению  $\mathbf{a}$  с учетом (9) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{a}} &= -y_v \left[ \frac{I_{yd} b}{m} \mathbf{a} + \frac{\partial C_{xa}}{\partial \mathbf{a}} \frac{rV^2}{2m} S \right] + \\ &+ \frac{y_q}{V} \left[ \frac{I_{ya} b}{m} + \frac{\partial C_{ya}}{\partial \mathbf{a}} \frac{rV^2}{2m} S \right] = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Аналитические зависимости аэродинамических коэффициентов от угла атаки записываются в виде

$$\begin{aligned} C_{xa}(\mathbf{a}, M) &= C_{xa0}(M) + C_{xa1}(M)\mathbf{a} + C_{xa2}(M)\mathbf{a}^2; \\ C_{ya}(\mathbf{a}, M) &= C_{ya0}(M) + C_{ya1}(M)\mathbf{a}. \end{aligned} \quad (12)$$

Тогда с учетом (12) из (11) имеем

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{y_q \left[ 2I_{yd} b_{max} + C_{ya1} rV^2 S \right] - y_v C_{xa1} rV^3 S}{2y_v V \left[ I_{yd} b_{max} + C_{xa2} rV^2 S \right]}. \quad (13)$$

Программа управления углом атаки (13) является оптимальной только в случае, когда соответствующее значение функции управления доставляет максимум функции  $H$ . Достаточное условие максимума  $H$  по управлению имеет вид

$$\frac{\partial^2 H}{\partial a^2} = -y_v (I_{уд} b + C_{xa2} r V^2 S) < 0. \quad (14)$$

Так как коэффициент  $C_{xa2}$  положителен, как старший коэффициент параболы, описывающей зависимость коэффициента лобового сопротивления  $C_{xa}$  от угла атаки, то выражение в скобках в (14) всегда положительно. Поэтому достаточное условие принимает вид

$$y_v > 0. \quad (15)$$

Система уравнений (2), описывающих движение, вместе с сопряженной системой (7) образуют совокупную систему уравнений.

Пусть угол атаки в совокупной системе определяется согласно (13). Тогда система становится замкнутой относительно векторов  $x$  и  $\psi$  и вместе с граничными условиями (3), (8) приводит к краевой задаче для системы нелинейных дифференциальных уравнений первой степени.

Таким образом, рассматриваемая задача оптимального управления сводится к следующей четырехпараметрической краевой задаче: требуется найти решение совокупной системы уравнений (2), (7), замкнутой соотношением (13), которое удовлетворяет граничным условиям (3), (8).

Параметрами краевой задачи являются значения сопряженных переменных в начальный момент времени:  $y_{v_n}, y_{q_n}, y_{h_n}, y_{m_n}$ .

### Определение начальных приближений сопряженных переменных

Так как в любой точке временного отрезка, на котором функция  $H$  достигает максимума, существует первый интеграл совокупной системы  $H = const$ , то для начального момента времени, согласно (9), можно получить следующее выражение:

$$\psi_{h_n} = - \frac{\psi_{v_n} V_n^2 + \psi_{q_n} \dot{V}_n + \psi_{m_n} r \dot{V}_n}{\dot{V}_n}. \quad (16)$$

Предположим, что в начальный момент времени известно значение оптимального угла атаки. Тогда функция  $H$  достигает своего максимального значения и выполняется необходимое условие экстремума. Используя (13), получим

$$y_{q_n} = y_{v_n} \frac{[2I_{уд} b a_n + (C_{xa1} + 2C_{xa2} a_n) r V_n^2 S]}{2I_{уд} b + C_{ya1} r V_n^2 S}. \quad (17)$$

Таким образом, неизвестными остаются три параметра:  $a_n, y_{m_n}, y_{v_n}$ . Значения параметра  $a_n$  выбираются из области определения управления.

Для определения отрезка числовой оси, в котором находится значение  $y_{m_n}$ , примем следующее допущение: масса топлива, затрачиваемого на рассматриваемом участке, при движении по произвольной траектории составляет 10 % от стартовой массы ГЛА.

Следовательно, для определения параметра  $y_{m_n}$  можно воспользоваться линейным приближением решения соответствующего дифференциального уравнения сопряженной системы (7):

$$\psi_{m_n} = \psi_{m_k} - \dot{\psi}_m (t_k - t_n). \quad (18)$$

Применяя приближенную формулу для коэффициента лобового сопротивления  $C_{xa} = C_{xa0} + A C_{ya}^2$ , можно показать, что

$$\psi_q \approx \psi_v V a. \quad (19)$$

Поэтому из последнего уравнения сопряженной системы с учетом (18), (19) и граничного условия в конечный момент времени:  $\psi_{m_k} = 1$  в качестве начального приближения  $y_m$  принимается

$$\begin{aligned} \psi_{m_n} &= 1 - \text{sign}(\dot{V}_n) m_T / m_n \approx \\ &\approx 1 - 0.01 \cdot n \cdot \text{sign}(\dot{V}_n) \cdot m_n / m_n. \end{aligned}$$

Поскольку в начальный момент времени ГЛА должен разгоняться ( $V_n^k > 0$ ), то отсюда следует, что параметр краевой задачи  $y_{mn} \in [0,9,1]$ .

Для определения параметра  $y_{Vn}$  используется первый интеграл совокупной системы вида

$$(H, L) = const, \quad (20)$$

где  $L = \frac{\partial H}{\partial a} \cdot m$ ;  $(, )$  - скобки Пуассона.

Подстановка в (20) соотношения (17) после преобразований дает

$$\left[ \frac{df_1(x, a)}{dt} + \frac{df_2(x, a)}{dt} \frac{2I_{yd} ba + \frac{\partial C_{xa}}{\partial a} rV^2 S}{2I_{yd} b + \frac{\partial C_{ya}}{\partial a} rV^2 S} \right] y_V = const, \quad (21)$$

$$\text{где } f_1(x, a) = \left[ I_{yd} ba + \frac{\partial C_{xa}}{\partial a} \frac{rV^2}{2} S \right],$$

$$f_2(x, a) = - \left[ I_{yd} b + \frac{\partial C_{ya}}{\partial a} \frac{rV^2}{2} S \right] \frac{1}{V}.$$

Пусть сопряженная переменная  $y_V$  в момент времени  $t_j$  определяется по методу Эйлера:

$$y_{Vj} = y_{Vn} + y_{Vn}^k \Delta t_j, \quad (22)$$

где  $\Delta t_j = t_j - t_n$ .

Введем обозначение

$$F = \left[ \frac{df_1(x, a)}{dt} + \frac{df_2(x, a)}{dt} \frac{2I_{yd} ba + \frac{\partial C_{xa}}{\partial a} rV^2 S}{2I_{yd} b + \frac{\partial C_{ya}}{\partial a} rV^2 S} \right] V \quad (23)$$

Тогда, согласно (21) и (22), параметр  $y_{Vn}$  определяется как

$$y_{Vn} = \frac{F_j}{F_n - F_j} y_{Vn}^k \Delta t_j. \quad (24)$$

С учетом уравнения сопряженной системы для  $y_{Vj}$  (24) запишется в виде

$$y_{Vn} = - \frac{y_{mn} b}{V_n} \frac{F_j \Delta t_j}{F_n - F_j (1 + G_n \Delta t_j)}, \quad (25)$$

где

$$G = - \left[ \frac{\partial I_{yd}}{\partial M} \frac{b}{ma} \cos a - \left( \frac{\partial C_{xa}}{\partial M} \frac{V}{a} + 2C_{xa} \right) \frac{rV}{2m} S \right] + \\ + \left\{ \left( \frac{I_{yd} a}{V} - \frac{\partial I_{yd}}{\partial M} \right) \frac{b}{Vma} \sin a - \right. \\ \left. - \left[ \left( \frac{\partial C_{ya}}{\partial M} \frac{V}{a} + C_{ya} \right) \frac{rS}{2m} + \frac{\cos q}{R+h} \right] \right\} \frac{2I_{yd} ba + \frac{\partial C_{xa}}{\partial a} rV^2 S}{2I_{yd} b + \frac{\partial C_{ya}}{\partial a} rV^2 S} + \\ + \left[ \frac{2I_{yd} ba + \frac{\partial C_{xa}}{\partial a} rV^2 S}{2I_{yd} b + \frac{\partial C_{ya}}{\partial a} rV^2 S} \right] \frac{1}{V}.$$

Расчет по формуле (25) проводится следующим образом:

- при  $t = t_n$  задаются значения вектора состояния  $x$  из граничных условий движения ГЛА, начальное приближение угла атаки  $a_n$  из области ограничений на управление и начальное значение сопряженной координаты  $y_m$ ;

- из решения задачи Коши для системы, описывающей движение ГЛА, определяется значение вектора  $x$  в момент времени  $t_1 = t_n + h$ , где  $h$  - шаг интегрирования;

- задается значение производной угла атаки в начальный момент времени  $\dot{a}_n$ ;

- определяется значение угла атаки  $a$  в момент времени  $t_1$  по формуле

$$a_1 = a_n + \dot{a}_n \cdot h;$$

- методом секущих определяется значение сопряженной переменной  $y_V$  в момент времени  $t = t_n$ ;

- 1) величины  $x_n, x_1, a_n, a_1, y_{mn}$  подставляются в формулу (25), причем  $j = 1, \Delta t_j = h$ ;

2) по (16) и (17) определяются сопряженные переменные  $Y_{hn}$ ,  $Y_{qn}$ , и на отрезке времени  $t \in [t_n, t_1]$  решается задача Коши для совокупной системы;

3) из решения определяется оптимальный угол атаки в момент времени  $t_1$  -  $\bar{a}_1$ , удовлетворяющий условию максимума функции  $H$ ,  $a_1^k = \bar{a}_1$ ;

4) определяется значение производной угла атаки в начальный момент времени по формуле:  $\dot{a}_n^k = (a_1^k - a_n)/h$ ;

5) проверяется условие окончания итерационного процесса

$$|\dot{a}_n^k - \dot{a}_n| \leq e, \quad (26)$$

где  $e$  - малая положительная константа;

б) если (26) не выполняется, то по формуле секущих определяется значение угла атаки  $a_1^{k+1}$ ,  $a_1 = a_1^{k+1}$ ,  $k=k+1$ , и процесс повторяется с пункта 1.

В результате параметрами краевой задачи являются значения угла атаки  $a$ , производной угла атаки по времени  $\dot{a}$  и сопряженной переменной  $\psi_m$  в начальный момент времени, лежащие в отрезках числовой оси:

$$\begin{cases} a_{min} \leq a_n \leq a_{max}, \\ \dot{a}_{min} \leq \dot{a}_n \leq \dot{a}_{max}, \\ 0.9 \leq y_{mi} \leq 1. \end{cases}$$

Границы  $\dot{a}_{min}$  и  $\dot{a}_{max}$  определяются аэродинамическими характеристиками ГЛА.

### Расчет оптимальных траекторий и программы управления

В качестве объекта управления рассматривается ГЛА со стартовой массой 300000 кг, выполненный по схеме «бесхвостка» с крылом двойной стреловидности [2] с ракетно-турбинным пароводородным двигателем (РТДп) и стартовой тяговооруженностью  $m_0 = 1$  [3].

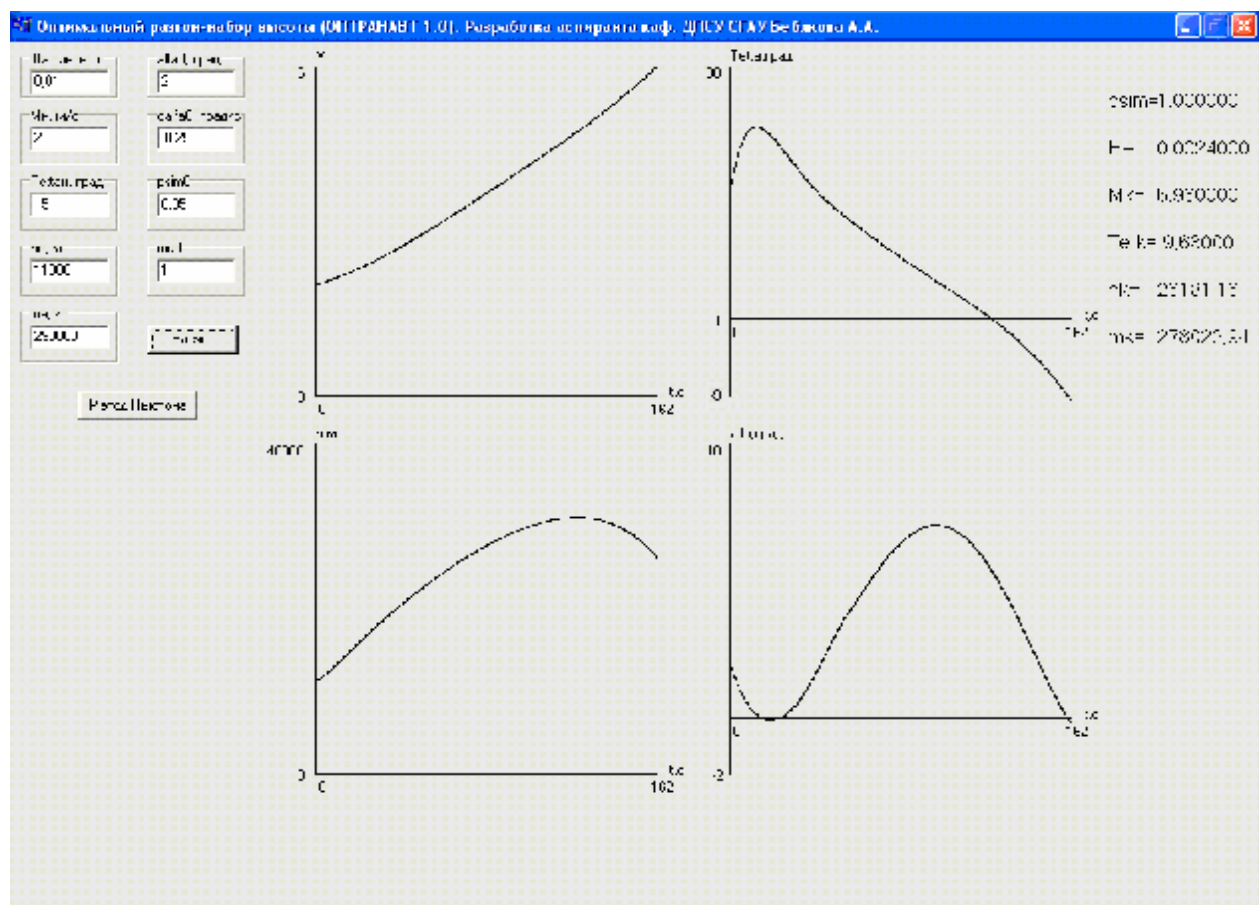


Рис. 1. Скриншот результатов работы программы ОПТТРАННАВТ при выборе начальных приближений краевой задачи в интерактивном режиме

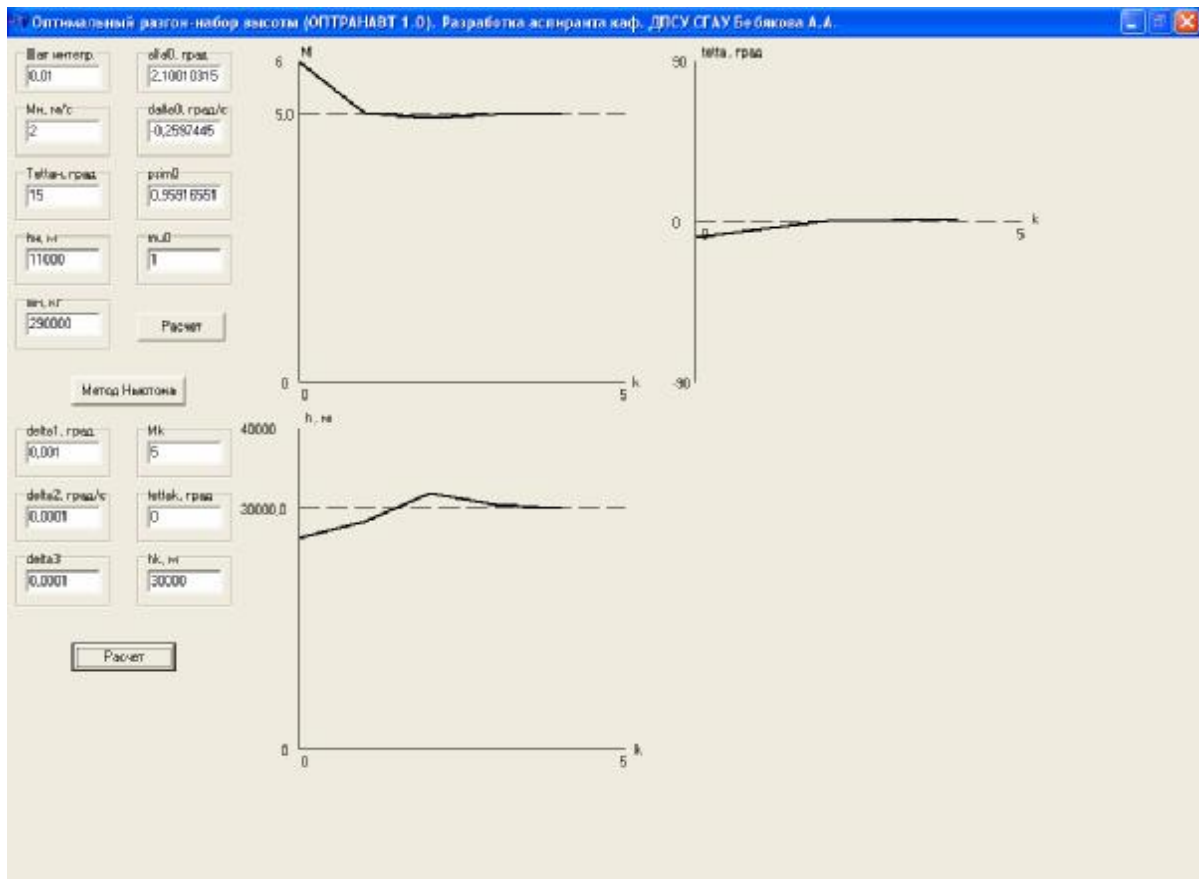


Рис. 2. Скриншот результатов работы программы ОПТРАНАВТ при реализации метода Ньютона

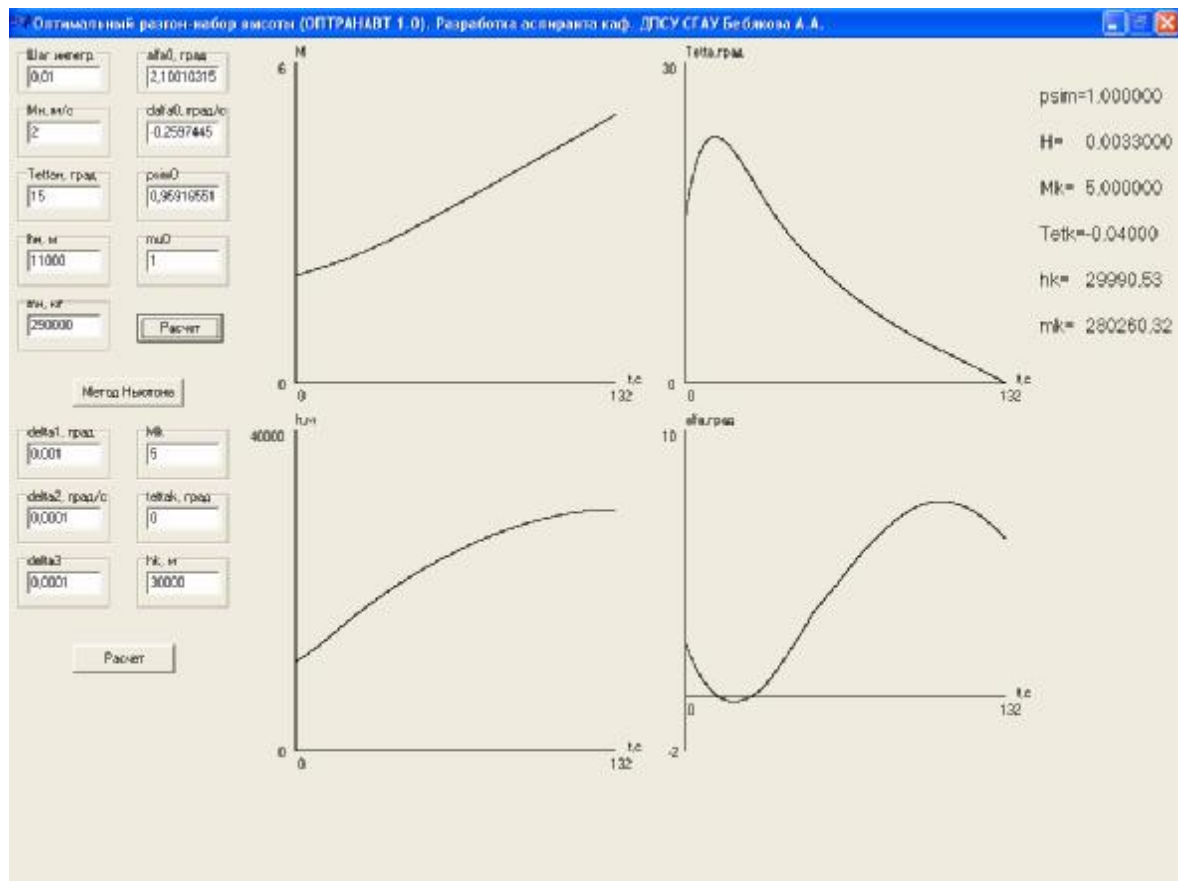


Рис. 3. Скриншот результатов работы программы ОПТРАНАВТ при расчете оптимальных траекторий и программы управления ГЛА

В начальный момент времени принимается положение ГЛА на типовой траектории [2] со следующими граничными условиями (3) для  $t = t_n$ :  $M_n = 2$ ,  $q_n = 15$  град,  $h_n = 11000$  м,  $m_n = 290000$  кг.

В конечный момент времени граничные условия движения задаются на границе гиперзвукового участка для  $t = t_k$ :  $M_k = 5$ ,  $q_k = 0$ ,  $h_k = 30000$  м.

Для расчета оптимальных траекторий и программ управления углом атаки реализована программа «Оптимальный разгон-набор высоты» (ОПТРАНАВТ) средствами среды программирования Borland C++ Builder 6.0. На рис. 1-3 в качестве примера приведены начальные приближения краевой задачи, выбираемые в интерактивном режиме, решение краевой задачи методом Ньютона и результаты расчетов.

## Список литературы

1. Летов А. М. Динамика полета и управление. - М.: Наука, 1969.
2. Нечаев Ю. Н. Силовые установки гиперзвуковых и воздушно – космических летательных аппаратов. - М.: Издание Академии Космонавтики им. К. Э. Циолковского, 1996.
3. Нечаев Ю. Н., Полев А. С., Никулин А. В. Моделирование условий работы пароводородного РТД в составе силовой установки гиперзвукового летательного аппарата / Вестник академии космонавтики: направление фундаментальных и прикладных проблем космонавтики, - материалы научных докладов на заседаниях направления в 1996-1997 гг. - М.: Издание Академии Космонавтики им. К. Э. Циолковского, 1998. - С. 159-191.