

## МЕТОДИКА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ПРИ КОМПЛЕКСИРОВАНИИ МАГНИТОМЕТРИЧЕСКИХ И РАДИОНАВИГАЦИОННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

© 2007 И. В. Белоконов, А. В. Крамлих

Самарский государственный аэрокосмический университет

Рассматривается методика восстановления ориентации космического аппарата при комплексировании магнитометрических и радионавигационных измерений. Эффективность методики подтверждена на модельной задаче.

### Введение

Методы решения задачи определения ориентации космических аппаратов (КА) по магнитометрическим измерениям изложены в работах [1-4]. Основным недостатком этих методов является использование модели движения КА, что, в свою очередь, затрудняет использование этих методов для определения ориентации в темпе поступления информации. В работах [5-8] описаны методы, базирующиеся на согласовании векторов в двух системах координат (СК), при этом минимальное количество векторов равно двум [7]. В качестве системы векторов наиболее часто используются векторы напряженности магнитного поля Земли (МПЗ), направления на звезды и Солнце [6, 8]. Компоненты этих векторов, заданные в удобной для КА системе координат (например, в орбитальной СК), определяются, исходя из имеющейся априорной информации. В частности, вектор напряженности МПЗ отыскивается с использованием модели МПЗ, а векторы направлений на звезды и Солнце находятся по каталогам и данным об эфемеридах. Компоненты векторов в связанной с КА системе координат измеряются с помощью трехкомпонентного магнитометра и специальной аппаратуры, определяющей направления на звезды и Солнце. При определении ориентации КА на основе согласования векторов в двух СК необходимо знание орбиты движения КА, что требует наличия на нем навигационного приемника (НП) или радиоконтроля орбиты.

В работе предлагается методика определения ориентации и динамики движения КА с использованием минимального состава измерительной аппаратуры, в качестве которой используется многоканальный НП, принимающий сигналы от спутниковых радионавигационных систем (СРНС) ГЛОНАСС и GPS, и магнитометр.

### Постановка задачи определения ориентации КА

При постановке и решении задачи определения ориентации КА использованы правые ортогональные СК с центром, расположенным в центре масс:

- связанная СК (ССК)  $OX_1Y_1Z_1$  (ось  $OX_1$  – продольная ось);
- орбитальная СК (ОСК)  $OX_2Y_2Z_2$  (ось  $OZ_2$  направлена по радиусу-вектору КА, ось  $OY_2$  направлена по вектору кинетического момента орбитального движения КА, ось  $OX_2$  дополняет систему до правой).

Положение СК  $OX_1Y_1Z_1$  относительно СК  $OX_2Y_2Z_2$  задается с помощью кватерниона  $v = (v_0, v_1, v_2, v_3)$ , имеющего единичную норму:  $v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$ . Матрицу перехода от  $OX_2Y_2Z_2$  к  $OX_1Y_1Z_1$  обозначим  $M_{x_1x_2}$ . Элементы этой матрицы выражаются через компоненты кватерниона  $v$  с помощью формул:

$$\begin{aligned}
m_{11} &= v_0^2 + v_1^2 - v_2^2 - v_3^2; \\
m_{12} &= 2 \cdot (v_1 v_2 + v_0 v_3); \\
m_{13} &= 2 \cdot (v_1 v_3 - v_0 v_2); \\
m_{21} &= 2 \cdot (v_1 v_2 - v_0 v_3); \\
m_{22} &= v_0^2 - v_1^2 + v_2^2 - v_3^2; \\
m_{23} &= 2 \cdot (v_0 v_1 + v_2 v_3); \\
m_{31} &= 2 \cdot (v_1 v_3 + v_0 v_2); \\
m_{32} &= 2 \cdot (v_2 v_3 - v_0 v_1); \\
m_{33} &= v_0^2 - v_1^2 - v_2^2 + v_3^2.
\end{aligned} \tag{1}$$

Задача определения ориентации КА рассматривается как задача нахождения кватерниона  $v$ .

При разработке алгоритмов решения задачи определения ориентации широко применяется подход, основанный на согласовании измерений различных векторов в двух СК, взаимная ориентации которых подлежит определению [7-9]. При решении задачи определения ориентации в качестве первого вектора  $U^1$  будет взят вектор напряженности МПЗ, а в качестве второго вектора  $U^2$  – вектор положения антенны НП. Определение вектора  $U^2$  принципиально возможно по анализу пространственного расположения видимых и невидимых навигационных спутников (НС).

Для отыскания кватерниона используется метод, описанный в [8]. Суть метода заключается в минимизации критерия, представляющего собой взвешенную с весами  $a_i$  сумму квадратов разностей между значениями двух векторов, заданных в двух СК [9]:

$$J(M_{x_1 x_2}) = \sum_{i=1}^2 a_i (U_1^i - M_{x_1 x_2} \cdot U_2^i)^T (U_1^i - M_{x_1 x_2} \cdot U_2^i), \tag{2}$$

где  $M_{x_1 x_2}$  – матрица, описывающая связь ОСК и ССК, параметризованная с помощью кватернионов;  $U_1^i$ ,  $U_2^i$  – векторы в ССК и ОСК, соответственно ( $i = 1, 2$ ).

После отыскания кватерниона  $v$  проекции абсолютной угловой скорости  $\bar{w}$  СК  $Ox_1 Y_1 Z_1$  на ее собственные оси находятся с

помощью численного дифференцирования найденного кватерниона и кинематических уравнений

$$\begin{aligned}
w_1 &= 2(v_0 \mathbf{e}_1 - v_1 \mathbf{e}_0 + v_3 \mathbf{e}_2 - v_2 \mathbf{e}_3), \\
w_2 &= 2(v_0 \mathbf{e}_2 - v_3 \mathbf{e}_0 + v_1 \mathbf{e}_3 - v_2 \mathbf{e}_1), \\
w_3 &= 2(v_0 \mathbf{e}_3 - v_2 \mathbf{e}_0 + v_1 \mathbf{e}_1 - v_3 \mathbf{e}_2).
\end{aligned} \tag{3}$$

### Решение задачи определения ориентации КА

Решение задачи определения ориентации КА разбивается на два этапа.

На первом этапе отыскивается вектор положения антенны НП в ОСК, и с этой целью анализируется пространственное положение НС систем ГЛОНАСС и GPS. Все НС разделяются на видимые и невидимые, которые, в свою очередь, разделяются на невидимые из-за затенения Землей и затененные конструкцией КА.

Для определения вектора положения антенны НП в ОСК предполагается, что заданы следующие исходные данные:

1. Координаты антенны в ССК (для определенности будем считать, что антенна размещена на продольной оси КА) и конус ее затенения со стороны конструкции КА.

2. Навигационные данные, формируемые НП (массив номеров всех навигационных спутников, массив номеров видимых НС, массив номеров невидимых НС, геоцентрические координаты всех НС в СРНС, представленные в виде матрицы размером  $N_{НС} \times 3$ ).

3. Параметры движения центра масс (ПДЦМ) КА, получаемые от НП.

По имеющимся исходным данным в ОСК вычисляются единичные векторы, коллинеарные векторам дальностей до видимых ( $B$ ) и невидимых ( $HB$ ) НС, и из них формируются соответствующие матрицы  $H_B$  размером  $N_{HB} \times 3$  и  $H_{HB}$  размером  $N_{HHB} \times 3$  (при этом исключаются из рассмотрения те НС, видимость которых отсутствует из-за затенения Землей).

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
H_B^T &= \left[ \overline{grad}_{B1} \quad \overline{grad}_{B2} \quad \mathbf{K} \overline{grad}_{B_{NB}} \right]^T, \\
H_{HB}^T &= \left[ \overline{grad}_{HB1} \quad \overline{grad}_{HB2} \quad \mathbf{K} \overline{grad}_{HB_{NB}} \right]^T,
\end{aligned}$$

где  $\overline{grad}_i = \{x_{2i}, y_{2i}, z_{2i}\}$  - единичный вектор дальности до  $i$ -го НС в проекциях на оси ОСК.

Исходя из того, что ширина диаграммы направленности антенны составляет  $180^\circ$ , для видимых и невидимых НС выполняем следующие соотношения:

$$\begin{cases} \cos(\overline{U}_1^2, \overline{grad}_{B_i}) \geq 0, & (i = \overline{1, N_B}); \\ \cos(\overline{U}_1^2, \overline{grad}_{HB_j}) < 0, & (j = \overline{1, N_{HB}}), \end{cases}$$

где  $\overline{U}_1^2 = \{x_2, y_2, z_2\}$  - единичный вектор антенны, записанный в проекциях на оси ОСК.

Так как  $|\overline{U}_1^2| = 1$  и  $|\overline{grad}_i| = 1$ , то, представляя косинусы углов через скалярные произведения, можно записать

$$\begin{cases} x_{2i}x_2 + y_{2i}y_2 + z_{2i}z_2 \geq 0, & (i = \overline{1, N_B}); \\ x_{2j}x_2 + y_{2j}y_2 + z_{2j}z_2 < 0, & (j = \overline{1, N_{HB}}). \end{cases} \quad (4)$$

Используя соотношения (4), описывающие геометрические связи между видимыми и невидимыми НС и вектором антенны, можно записать функционал вида:

$$\begin{aligned} \Phi(x_2, y_2, z_2) = & \sum_{i=1}^{N_B} (x_{2i}x_2 + y_{2i}y_2 + z_{2i}z_2 - 1)^2 \\ & + \sum_{j=1}^{N_{HB}} (x_{2j}x_2 + y_{2j}y_2 + z_{2j}z_2 + 1)^2, \end{aligned} \quad (5)$$

который в дальнейшем используется для поиска координат антенны в ОСК.

Первое слагаемое функционала описывает связь проекции вектора антенны  $\overline{U}_1^2$  с проекциями единичных векторов видимых НС  $\overline{grad}_{B_i}$  на оси ОСК, второе слагаемое описывает аналогичную связь вектора антенны с векторами невидимых НС.

Решается задача отыскания минимума функционала (5) по координатам  $x_2, y_2, z_2$  с учетом условия нормировки для координат антенны:  $x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 1$ .

На втором этапе непосредственно решается задача определения ориентации и динамики КА.

Искомый кватернион отыскивается из условия минимума критерия (2) с учетом единственного дополнительного уравнения, обеспечивающего условие нормировки для элементов кватерниона:  $v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$ . В работе [8] показано, что минимизация критерия (2) при условии нормировки для элементов кватерниона сводится к нахождению минимального собственного числа четырехмерной матрицы:

$$B = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{a_i} \begin{bmatrix} S & Z \\ Z^T & t \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где  $S = I((\overline{U}_1^i)^T \overline{U}_2^i) - \overline{U}_2^i (\overline{U}_1^i)^T - \overline{U}_1^i (\overline{U}_2^i)^T$ ;

$Z = -(\overline{U}_1^i \times \overline{U}_2^i)$ ;  $t = -(\overline{U}_1^i)^T \overline{U}_2^i$ .

При этом искомый кватернион представляет собой собственный вектор, соответствующий наименьшему собственному числу матрицы (6).

Кватернион  $v_k$ , в момент времени  $t_k$  задающий ориентацию КА, определяется с точностью до знака. Знаки элементов кватерниона  $v_k$  выбираются из условия

$$v_0^{(k)} > 0, \quad \sum_{i=0}^3 v_i^{(k-1)} v_i^{(k)} > 0 \quad (k = \overline{1, N}).$$

После уточнения знака кватерниона определяются проекции абсолютной угловой скорости  $\overline{\omega}$  СК  $Ox_1Y_1Z_1$  на ее собственные оси по соотношениям (3).

### Описание модельной задачи

Моделирование задачи определения ориентации КА проводилось при следующих положениях:

1) орбита КА круговая, высота ( $h$ ) 300 км и 1000 км, наклонение  $63^\circ$ ;

2) количество НС равно 48, что соответствует общему количеству НС в СРНС ГЛОНАСС (при ее полном развертывании) и GPS;

- 3) антенна НП расположена по оси  $OX_1$ ;
- 4) вектор напряженности МПЗ считается точно измеренным;
- 5) положение КА на орбите задается случайным образом по равновероятному закону (от  $0^\circ$  до  $360^\circ$ );
- б) массив углов ориентации КА формируется случайным образом по равновероятному закону, углы ориентации изменяются от  $0^\circ$  до  $360^\circ$ .

Моделирование задачи определения ориентации и динамики движения КА проводилось в три этапа.

**Этап 1.** Моделирование СРНС ГЛОНАСС и GPS (для простоты моделирования предполагалось, что в каждый момент времени положения ГЛОНАСС/GPS спутников «заморожено»). Моделирование движения КА и магнитометрических измерений. Моделирование магнитометрических измерений проводилось следующим образом. В ОСК по модели МПЗ в виде модели прямого диполя [10] рассчитывался вектор напряженности МПЗ ( $\bar{U}_2^1$ ), а затем с использованием известной матрицы перехода  $M_{x_1x_2}$  в ССК рассчитывался «измеренный» вектор напряженности МПЗ ( $\bar{U}_1^1$ ). Вектор антенны НП ( $\bar{U}_1^2$ ) в ССК согласно допущениям задавался векто-

ром с координатами  $\{1,0,0\}$ . Исключались НС, невидимые из-за затенения Землей.

**Этап 2.** Непосредственное отыскание вектора антенны НП в ОСК, основанное на отыскании минимума функционала (5) по координатам  $x_2, y_2, z_2$  с учетом условия нормировки для координат антенны:  $x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 1$ .

**Этап 3.** Определение ориентации КА по комплексированию магнитометрических и радионавигационных измерений.

### Исследование эффективности на модельной задаче

Для исследования эффективности решения задачи определения ориентации КА при комплексировании магнитометрических и радионавигационных измерений была сформирована выборка решений объемом 100000 реализаций.

Для высот 300 и 1000 км построена плотность распределения ошибки положения антенны  $P(d_a)$  (рис. 1 и 2). В качестве погрешности определения вектора положения антенны взят пространственный угол ( $d_a$ ) между истинным и найденным вектором положения антенны НП.

Математическое ожидание ошибки определения антенны  $M_a$  для  $h=300$  км равно

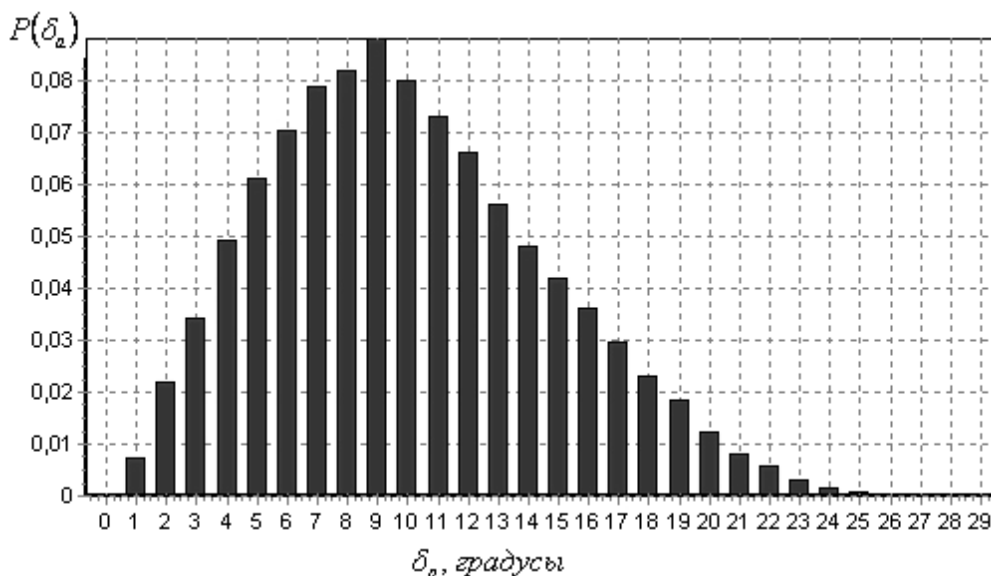


Рис. 1. Плотность распределения ошибки антенны  $P(d_a)$  при  $h=300$  км

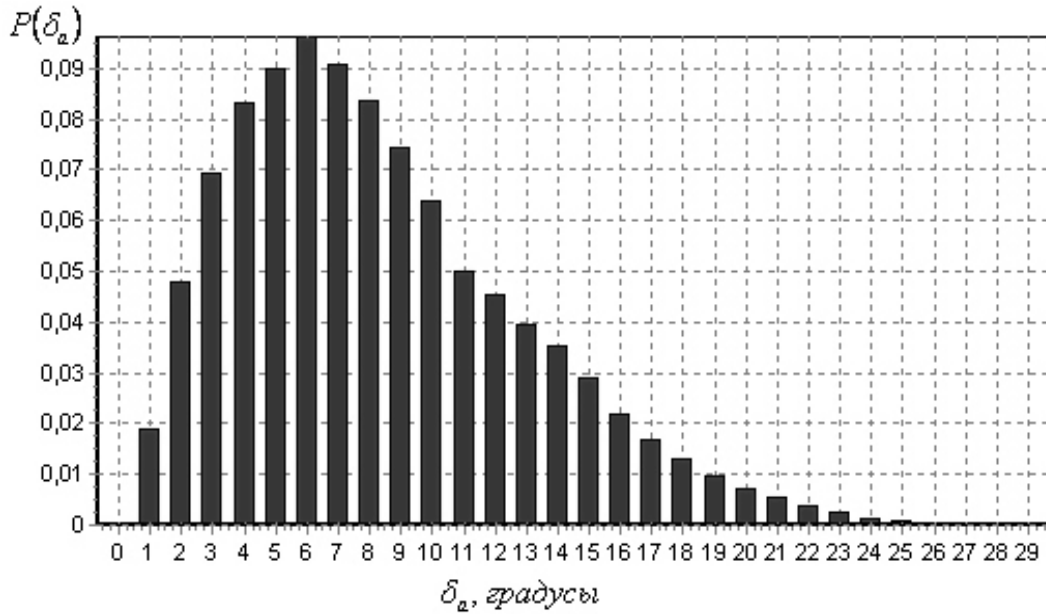


Рис. 2. Плотность распределения ошибки антенны  $P(d_a)$  при  $h=1000$  км

9,6°, для  $h=1000$  км равно 7,8°. Повышение точности с увеличением высоты объясняется уменьшением числа НС, затененных Землей.

Для удобства представления результатов была использована тройка углов ориентации  $(q, y, j)$ , задающая ориентацию СК  $Ox_2Y_2Z_2$  относительно СК  $Ox_1Y_1Z_1$ . Система координат  $Ox_2Y_2Z_2$  может быть переведена в систему координат  $Ox_1Y_1Z_1$  тремя последовательными поворотами: 1) на угол  $y$  вокруг оси  $O_2Z_2$ ; 2) на угол  $q$  вокруг оси  $OY_2'$ ; 3) на угол  $j$  вокруг оси  $Ox_2''$ , совпадающей с осью  $Ox_1$ .

Связь углов ориентации  $(q, y, j)$  с найденным кватернионом  $v$  задается соотношениями [11]:

$$v_0 = \cos\left(\frac{y}{2}\right)\cos\left(\frac{q}{2}\right)\cos\left(\frac{j}{2}\right) + \sin\left(\frac{y}{2}\right)\sin\left(\frac{q}{2}\right)\sin\left(\frac{j}{2}\right);$$

$$v_1 = \cos\left(\frac{y}{2}\right)\cos\left(\frac{q}{2}\right)\sin\left(\frac{j}{2}\right) - \sin\left(\frac{y}{2}\right)\sin\left(\frac{q}{2}\right)\cos\left(\frac{j}{2}\right);$$

$$v_2 = \cos\left(\frac{y}{2}\right)\sin\left(\frac{q}{2}\right)\cos\left(\frac{j}{2}\right) + \sin\left(\frac{y}{2}\right)\cos\left(\frac{q}{2}\right)\sin\left(\frac{j}{2}\right);$$

$$v_3 = \sin\left(\frac{y}{2}\right)\cos\left(\frac{q}{2}\right)\cos\left(\frac{j}{2}\right) - \cos\left(\frac{y}{2}\right)\sin\left(\frac{q}{2}\right)\sin\left(\frac{j}{2}\right).$$

В рамках модельной задачи был подобран коэффициент  $s$ , характеризующий отношение коэффициентов в выражении (2) при векторе напряженности МПЗ и векторе антенны НП, при котором достигается минимальная погрешность определения ориентации КА. Влияние коэффициента  $s$  на погрешность определения ориентации показано на рис. 3, 4 на примере математического ожидания ошибки угла  $q$ . Коэффициент  $s$  предлагается брать равным 10 для различных высот полета КА.

Изменение математических ожиданий ошибок углов  $(y, j)$  в зависимости от коэффициента  $s$  не превышает 0,3°.

Плотности распределения ошибок углов  $(q, y, j)$ , найденных по разработанному алгоритму, представлены на рис. 5-10.

Математические ожидания углов  $(q, y, j)$  при  $h=300$  км

$$M[d_q] = 2,8^\circ, \quad M[d_y] = 5,8^\circ, \quad M[d_j] = 4,0;$$

при  $h=1000$  км

$$M[d_q] = 1,5^\circ, \quad M[d_y] = 5,1^\circ, \quad M[d_j] = 3,6^\circ.$$

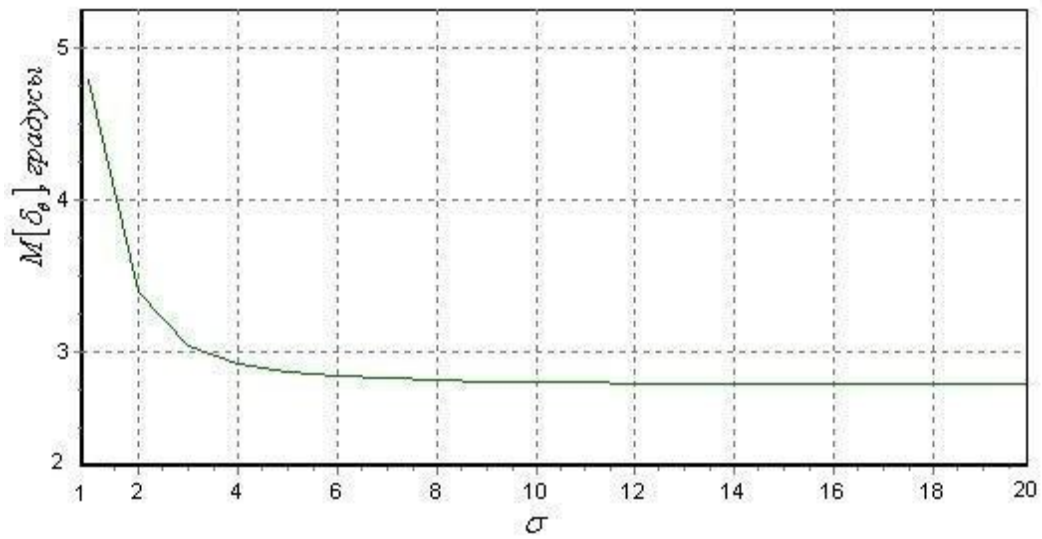


Рис. 3. Изменение математического ожидания ошибки  $d_q$  угла  $q$  от коэффициента  $s$  ( $h=300$  км)

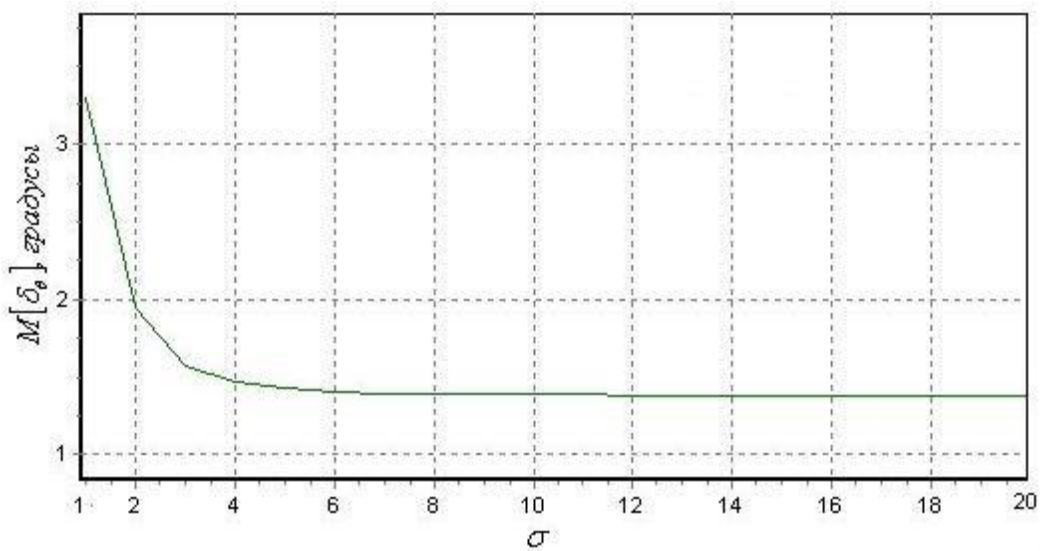


Рис. 4. Изменение математического ожидания ошибки  $d_q$  угла  $q$  от коэффициента  $s$  ( $h=1000$  км)

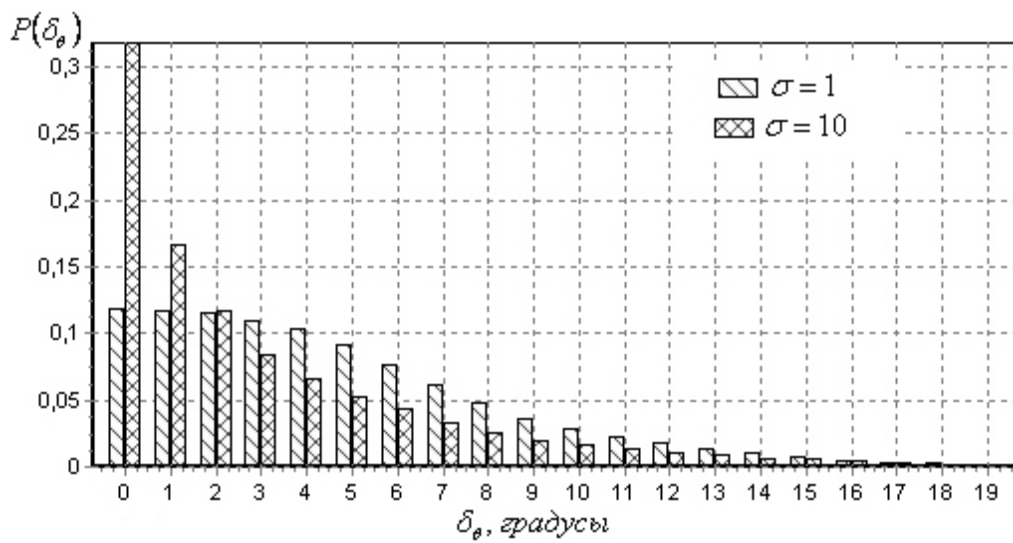


Рис. 5. Плотность распределения  $P(d_q)$  ошибки угла  $q$  при  $h=300$  км

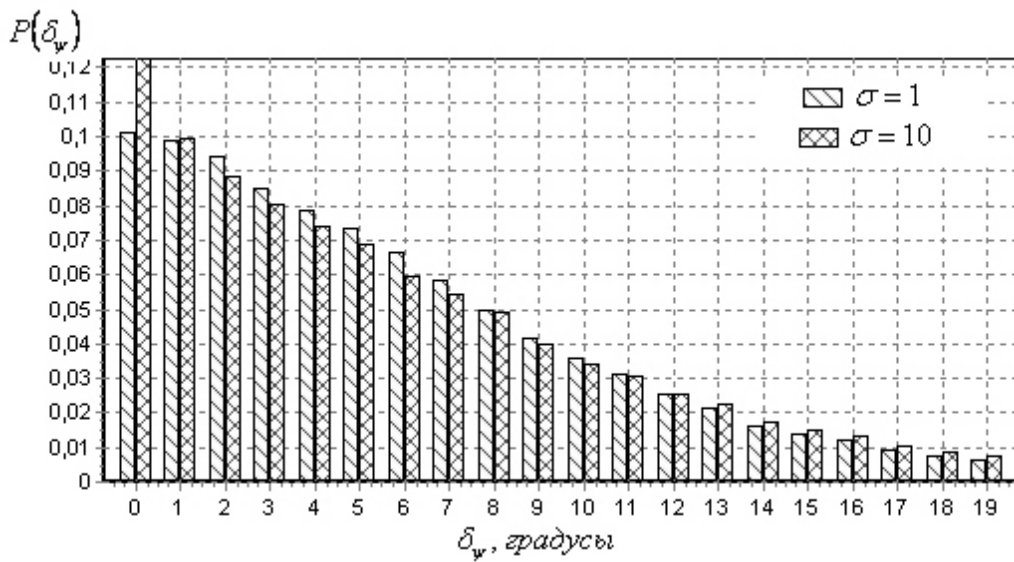


Рис. 6. Плотность распределения  $P(d_y)$  ошибки угла  $Y$  при  $h=300$  км

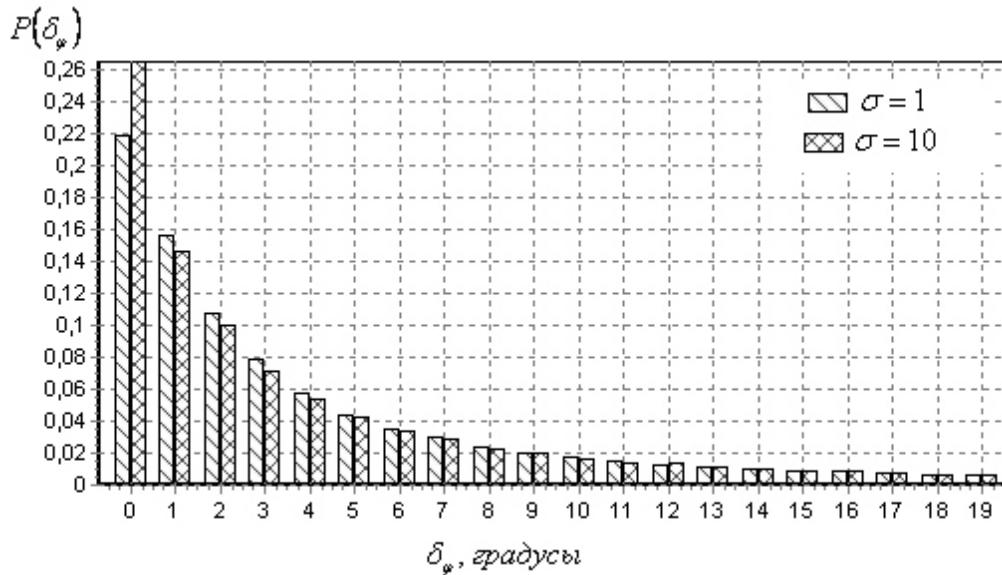


Рис. 7. Плотность распределения  $P(d_j)$  ошибки угла  $j$  при  $h=300$  км

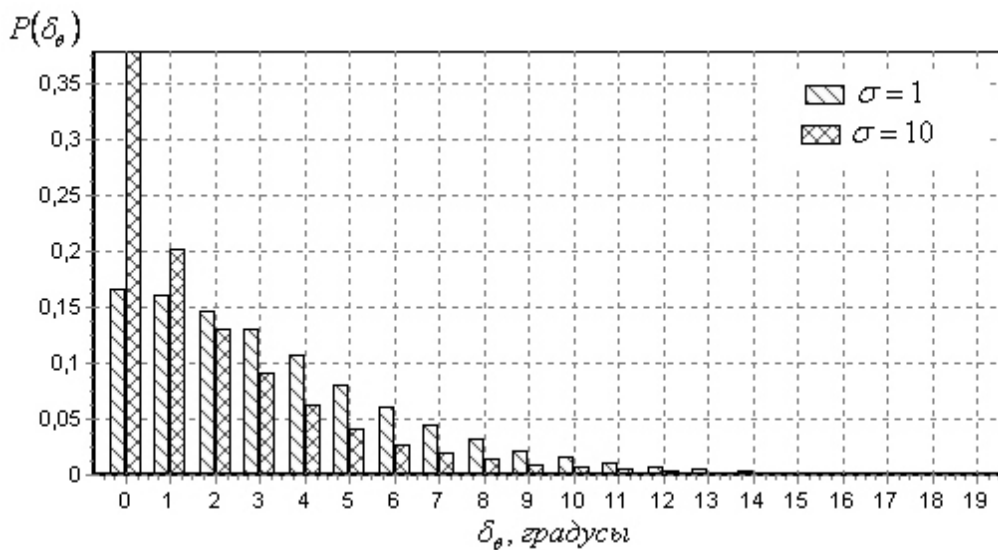


Рис. 8. Плотность распределения  $P(d_q)$  ошибки угла  $q$  при  $h=1000$  км

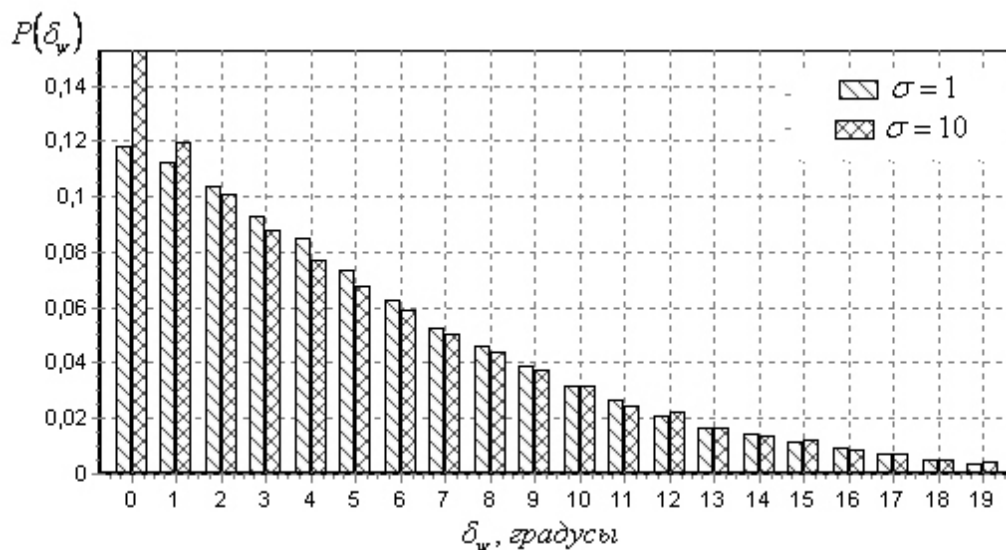


Рис. 9. Плотность распределения  $P(d_y)$  ошибки угла  $y$  при  $h=1000$  км

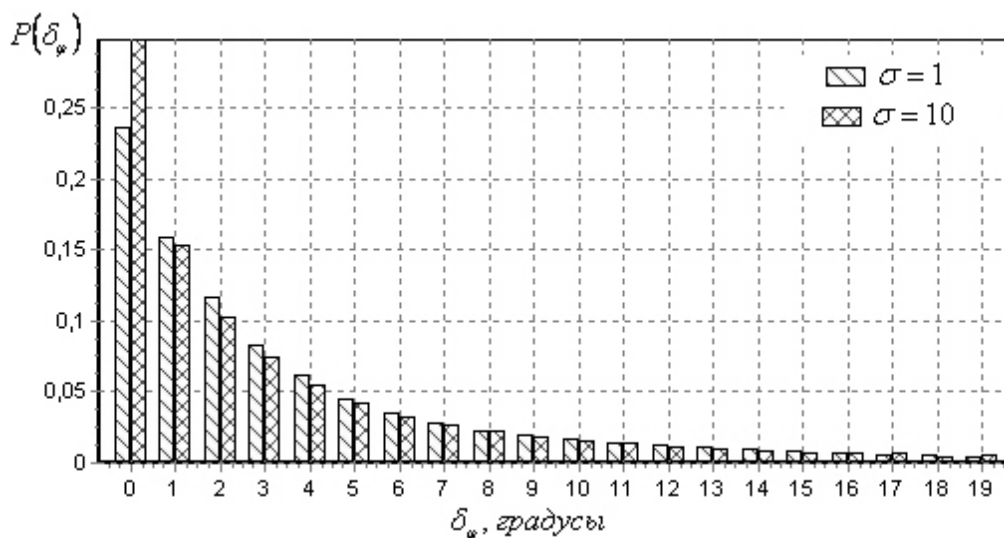


Рис. 10. Плотность распределения  $P(d_j)$  ошибки угла  $j$  при  $h=1000$  км

## Выводы

По результатам решения модельной задачи можно сделать следующие выводы.

1. Наибольший вклад в ошибку определения ориентации вносит ошибка определения вектора положения антенны в орбитальной системе координат. Снижение вклада данной ошибки возможно путем подбора коэффициента  $s$ .

2. С увеличением высоты полета погрешность определения ориентации КА уменьшается. Это объясняется уменьшением погрешности определения вектора положе-

ния антенны навигационного приемника в орбитальной системе координат, обусловленным уменьшением числа навигационных спутников, затененных Землей.

Погрешность определения углов ориентации космического аппарата по предложенному алгоритму с вероятностью 90 % не превышает  $5^\circ$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ № 060-08-00244а).



### Список литературы

1. Сидоров И. М., Прохоренко В. И. Определение углового положения искусственного спутника Земли с помощью датчиков магнитного поля // Космические исследования. 1968. - Т. VI. - Вып. 2. - С. 175–185.
2. Титов А. М., Антоненко В. В., Шукин В. П. Определение углового положения неориентированных ИСЗ по данным магнитометрических измерений // Космические исследования. - 1971. - Т. IX. - Вып. 3. - С. 397–407.
3. Хацкевич И. Г. Определение ориентации ИСЗ по магнитометрическим измерениям // Космические исследования. - 1972. - Т. X. - Вып. 1. - С. 3–12.
4. Абрашкин В. И. и др. Определение вращательного движения спутника «Фотон-М2» по данным бортовых измерений магнитного поля Земли (Препринт Института прикладной математики им. М.в. Келдыша РАН, 2005, № 96).
5. Голубков В. В. Определение локальной ориентации космических аппаратов // Космические исследования. - 1970. - Т. VIII. - Вып. 6. - С. 811–822.
6. Титов А. М., Шукин В. П. Определение ориентации по двухвекторной системе измерений // Космические исследования. - 1978. - Т. XVI. - Вып. 1. - С. 3–9.
7. Липтон А. Выставка инерциальных систем на подвижном основании. – М.: Наука, 1971.
8. Wertz J.R (Editor). Spacecraft Attitude Determination and Control. Dordrecht, The Netherlands. – 1978.
9. Wahba G. A Least Squares Estimate of Spacecraft Attitude //SIAM Review. – 1965., Vol.7, №3. – p. 409.
10. Коваленко А. П. Магнитные системы управления космическими летательными аппаратами. – М.: Машиностроение, 1976.
11. Бренец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. – М.: Наука, 1973.