

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ОПТИМАЛЬНЫХ ПЕРЕЛЕТОВ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ С ДВИГАТЕЛЯМИ МАЛОЙ ТЯГИ. ЧАСТЬ I

2007 В. В. Салмин, В. В. Васильев, С. А. Ишков, В. А. Романенко,
В. О. Соколов, О. Л. Старинова, В. В. Юрин

Самарский государственный аэрокосмический университет

В первой части статьи приводятся математические постановки задач оптимизации перелетов космических аппаратов с двигателями малой тяги и методы их решения. Рассматриваются особенности используемых математических моделей движения для оптимизации управления в рамках различных задач.

Введение

Механика полета с малой тягой (МТ) выделилась в настоящее время в новый раздел механики космического полета, рассматривающий в совокупности проблемы оптимизации траекторий и законов управления движением, а также выбора оптимальных проектных параметров космического аппарата (КА) и его энергодвигательной установки [1, 2].

К настоящему времени в России (а ранее в СССР) и ряде других стран – США, Германии, Франции, Англии, Японии – созданы и испытаны серийные образцы электроракетных двигателей (ЭРД), которые активно используются в космическом пространстве для решения целого ряда практических задач космонавтики. В основном ЭРД использовались в околоземном космосе. Однако уже имеются примеры успешной реализации космических перелетов с малой тягой в дальнем космосе, например, проекты NASA и ESA Deep Space 1 в 1999-2001 гг., SMART 1 в 2003 -2006 гг. (рис. 1.1) и продолжающаяся миссия JAXA Hayabusa 2003 г.

Главным направлением теоретических исследований в течение многих лет в области оптимизации космических перелетов с МТ является развитие аналитических и численных методов решения задач расчета оптимальных траекторий. В последнее время большее значение приобретают вопросы, связанные с учетом дополнительных факторов в математических моделях движения, использованием более полных проектных моделей КА и дополнительных ограничений на воз-

можности управления двигательной установкой (ДУ).

Поэтому вопрос выбора математической модели (или последовательности моделей) для решения вариационных задач приобретает первостепенную важность. Соответственно, проблема оптимизации маневра с МТ не сводится лишь к поиску оптимальных траекторий, а формулируется как проблема совместной оптимизации проектных параметров, траекторий и законов управления движением КА.

В настоящей статье, имеющей две части, представлены в сжатом виде результаты, полученные авторами в ходе многолетних исследований. Более подробное изложение описанных методов и задач содержится в монографиях [16, 25], а также в статьях [6 15, 17 24].

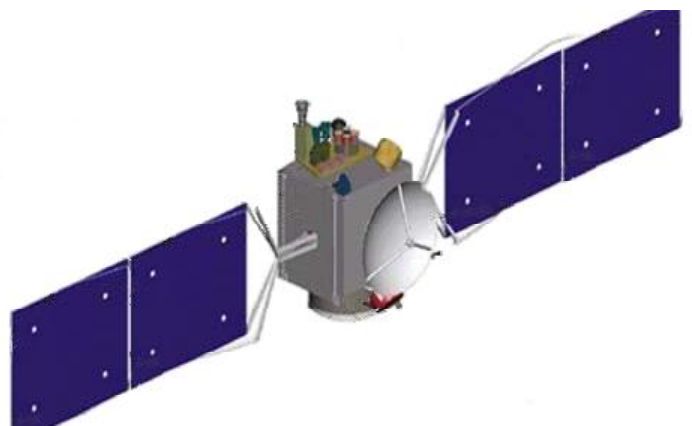


Рис. 1.1. Экспериментальный аппарат NASA Deep Space 1 с ЭРД

1. Методы и модели оптимизации космических перелетов с малой тягой

1.1. Математические постановки задач оптимизации

Сформулируем проблему совместной оптимизации баллистических параметров и траекторий динамического маневра и проектных параметров КА с двигателем МТ. Под динамическим маневром z из множества маневров Z понимается переход КА из начального состояния $x(t_0) \in X_0$ в конечное $x(t_K) \in X_K$. Вектор баллистических параметров маневра b включает начальное X_0 и конечное X_K многообразия в пространстве состояний, внешние условия и ограничения и определяет схему и продолжительность маневра:

$$\begin{aligned} z = (z_1, z_2, \dots, z_m)^T \in Z \subset E^m, \\ X_0 = X_0(z), \quad t_0 = t_0(z), \quad X_K = X_K(z), \quad t_K = t_K(z). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Обозначим символом p вектор проектных параметров $p = (p_1, p_2, \dots, p_l)^T \in P$, соответствующих принятой конструктивно-компоновочной схеме КА. Здесь P – множество допустимых проектных параметров.

Динамику движения КА будем описывать системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(t, x, u, p, u), \quad x(t_0) \in X_0(z), \quad x(t_K) \in X_K(z), \\ u = u(t, x) \in U(p), \quad p \in P, \quad z \in Z, \quad u \in \Omega(z). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in X$ – вектор состояния (фазовых координат) системы; $u(t, x) = (u_1, u_2, \dots, u_r)^T \in U(p)$ – вектор функций управления; $U(p)$ – множество допустимых управлений; $u \in \hat{W}(z)$ – вектор случайных и неопределенных параметров, учитывающий неполноту информации об условиях реализации отдельных маневров; множество $W(z)$ задает априори границы, в которых заключены неопределенности.

Общей задачей совместной оптимизации будем называть задачу отыскания проектных параметров $\bar{p} \in P$ и совокупности функций $(\bar{u}(t, x, z), \bar{x}(t, z))$ из множества допустимых D , обеспечивающих реализацию диапазона динамических маневров Z при минимальном (максимальном) значении заданного критерия эффективности m . Сложность этой задачи состоит в том, что траектории существенно зависят от проектных параметров, и наоборот, параметры КА во многом определяются выбранными траекториями и режимами управления.

Введем интегро-терминальный критерий (функционал) I , зависящий от траектории $x(t)$, управления $u(t, x)$, баллистических параметров маневра b и проектных параметров p , а также неопределенных факторов u :

$$I[z, p, x(t), u(t, x), u] = F[x(t_0), x(t_K)] + \int_{t_0}^{t_K} f_0(t, x, u, u) dt. \quad (1.3)$$

Задачу отыскания экстремума функционала $I[z, p, x(t), u(t, x), u]$ при заданных параметрах Z и p назовем **динамической задачей оптимизации**. Пусть существует траектория $\bar{x}(t)$ и управление $\bar{u}(t, x)$, доставляющие минимум функционалу $I[z, p, x(t), u(t, x), u]$ при фиксированных векторах Z и p для некоторой принятой модели неопределенностей $\tilde{u} \in \Omega$:

$$(\bar{x}(t), \bar{u}(t, x)) = \underset{\substack{x(t) \in X, \\ u(t, x) \in U(p)}}{\operatorname{argmin}} I[z, p, x(t), u(t, x), \tilde{u}]. \quad (1.4)$$

Минимальное значение функционала I , соответствующее этой траектории, будем называть **динамической характеристикой маневра** $S(z, p, \tilde{u})$.

Сформулируем различные постановки задачи оптимизации.

1. Основной задачей оптимизации КА, предназначенного для **выполнения единичного маневра с полной информацией** $z \in Z$, назовем задачу отыскания вектора проектных параметров $\bar{p} \in P$ и вектор функ-

ций $(\bar{u}(t, x, z), \bar{x}(t, z)) \in D$, доставляющих максимум критерию m :

$$(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) = \arg \max_{(x, u) \in D(p), p \in P} m(z, p, x(t), u(t, x)). \quad (1.5)$$

2. Вектор параметров $\bar{p} \in P$ оптимален для диапазона динамических маневров Z , если КА с параметрами \bar{p} может выполнить любой маневр из заданного диапазона Z и максимальная степень неоптимальности $r(z, p)$ на множестве Z достигает минимального значения при $p = \bar{p}$:

$$\bar{p} = \arg \min_{p \in P} \max_{z \in Z} r(z, p).$$

Под степенью неоптимальности $r(z, p)$ понимается мера проигрыша в критерии эффективности $m(z, p)$ при отклонении вектора проектных параметров $p(z)$ от оптимального значения $\bar{p}(z)$. Вектор \bar{p} назовем вектором универсальных для множества Z проектных параметров.

3. Задачу о максимуме критерия оптимальности $m(z, p, x, u)$ назовем разделяющейся на динамическую и параметрическую, если в критерии m удастся выделить критерий низшего уровня - функционал I , зависящий только от траекторий и управления и не зависящий от проектных параметров. Минимум I для каждого фиксированного маневра достигается на паре $(\bar{x}(t), \bar{u}(t, x)) \in D$ и обеспечивает локальный максимум критерия m при любом выборе вектора параметров $p \in P$: $m = m(z, p, I[z, x, u])$. Если в соответствии со сказанным выше

$$\min_D I[z, x(t), u(t, x)] \equiv S(z) \quad \forall p \in P,$$

тогда

$$m(z, p, \bar{x}, \bar{u}) \equiv m(z, p, S(z)).$$

Очевидно, если $\frac{\partial m}{\partial S} < 0$, то решение задачи оптимизации реализуется в форме двух

выполняемых независимо друг от друга операций:

$$1) (\bar{x}, \bar{u}) = \arg \min_{(x, u) \in D} I[z, x, u], \quad I(z, \bar{x}, \bar{u}) = S(z), \quad (1.6)$$

$$2) \bar{p} = \arg \max_{p \in P} m(z, p, S(z)). \quad (1.7)$$

4. Задачу о максимуме критерия $m(z, p, x, u)$ будем называть условно разделяющейся на динамическую и параметрическую части, если минимум функционала $I(z, p, x, u)$ обеспечивает локальный максимум критерия m . Отыскание глобального максимума m реализуется в форме двух последовательных операций:

$$1) (\bar{x}, \bar{u}) = \arg \min_{(x, u) \in D} I[z, p, x, u], \\ I(z, p, \bar{x}, \bar{u}) = S(z, p), \quad (1.8)$$

$$2) \bar{p}(z) = \arg \max_{p \in P} m(z, p, S(z, p)). \quad (1.9)$$

Решение этой задачи связано с необходимостью иметь зависимость $S(z, p)$, определенную на множестве P во всем диапазоне маневров Z .

1.2. Методы решения задач оптимального управления

В задачах оптимального управления элементами класса допустимых D являются управляемые процессы, точнее их математические модели. Рассмотрим систему, которая в каждый момент времени характеризуется вектором состояния $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, являющимся элементом некоторого множества X , называемого пространством состояний. Изменение состояния x во времени называется процессом. Управляемые процессы принято описывать путем указания закономерности перехода от предыдущего состояния к последующему в зависимости от управляющего воздействия, которое характеризуется вектором управлений $u = (u_1, u_2, \dots, u_r)^T$, являющимся элементом некоторого множества U (множества управлений).

Математическая модель управляемого процесса представляет собой, как правило, уравнение, связывающее последующее состояние с предыдущим состоянием и управлением.

Следует подчеркнуть, однако, формальный смысл понятий состояния и управления, связанный с принятой формой математической модели, которая для реального объекта может быть не единственной. Например, в задачах оптимизации космических траекторий в качестве состояния принято рассматривать положение и скорость центра масс КА, а в качестве управления – направление вектора тяги. Изменение направления вектора тяги часто достигается путем его поворота с помощью устройств, создающих моменты относительно центра масс (ЦМ), что заставляет учитывать и динамику вращательного движения КА. Это несоответствие отражает тот факт, что математическая модель зависит от тех задач, которые должны решаться с ее помощью.

Пусть на отрезке $[t_0, t_k]$ задается множество D как множество кусочно-непрерывных функций $u(t)$ и кусочно-дифференцируемых $x(t)$, удовлетворяющих условиям (1.2) и минимизирующих функционал (1.3). Общий подход к решению задачи оптимизации в постановке (1.2, 1.3) основан на использовании принципа расширения и достаточных условий оптимальности В.Ф. Кротова [3, 4].

Как правило, во многих задачах оптимизации множество допустимых D задается посредством некоторых условий, выделяющих его из более широкого множества E . Принцип расширения множества допустимых состояний и управлений состоит в том, что функционал доопределяется на более широком множестве E' , но так, что наименьшее значение он принимает в D . Для того, чтобы функционал (1.3) достигал абсолютного минимума на $(\bar{x}, \bar{u}) \in D$, достаточно существования такой непрерывной и дифференцируемой функции $j(t, x)$, чтобы

$$1. R(\bar{x}, \bar{u}, t) = \max_{(x, u) \in E(t)} R(x, u, t),$$

$$2. G(\bar{x}(t_0), \bar{x}(t_k)) = \min_{\substack{x(t_0) \in E_x(t_0) \\ x(t_k) \in E_x(t_k)}} G(x(t_0), x(t_k)), \quad (1.10)$$

$$\text{где } R = \sum_{i=1}^n \frac{\partial j}{\partial x_i} f_i + \frac{\partial j}{\partial t},$$

$$G(x_0, x_k) = F(\cdot) + j(t_k, x_k) - j(t_0, x_0). \quad (1.11)$$

Необходимо задать синтезирующую функцию $j(t, x)$, которая доопределяет функционал I на $E \bar{E} D$ так, чтобы минимум I принадлежал D . Один из способов (формализмов) приводит к процедуре принципа максимума Понтрягина, другой – к процедуре динамического программирования, а третий (метод кратных максимумов) пригоден для решения так называемых вырожденных задач.

1.3. Метод усреднения в задачах оптимального управления

При решении некоторых видов динамических задач оптимизации в механике полета с МТ используются методы асимптотического разделения параметров движения на быстрые и медленные компоненты [2]. Это обуславливается, во-первых, наличием в явном виде малого параметра – реактивного ускорения от тяги, которое меньше гравитационного на несколько порядков; во вторых, присутствием циклической переменной – угловой координаты.

Запишем уравнения движения в общем виде, придерживаясь общепринятых в задачах такого рода обозначений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a \cdot X(x, j, u(t)), \\ \dot{j} &= w(x, j) + a \cdot Y(x, j, u(t)), \end{aligned} \quad (1.12)$$

где x – вектор «медленных» переменных размерности n ; a – малый параметр; j – быстрая скалярная переменная (фаза); $u(t) \in U$ – вектор управлений размерности r .

В общем случае в управление могут входить как быстрые, так и медленные составляющие. Поэтому задачу выбора оптимального управления удобно разделить на две: определение управления как функции

быстрой переменной (выбор структуры управления на витке) и определение законов изменения параметров этой программы от витка к витку.

Критерий оптимальности представим в следующем виде:

$$I = a \int_0^T F_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) dt. \quad (1.13)$$

Перейдем в системе (1.12) от времени t к быстрой переменной j :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dj} &= a\mathbf{X}(\mathbf{x}, j, \mathbf{u}(t)) \cdot w^{-1}(\mathbf{x}, j), \\ \frac{dt}{dj} &= a \cdot w^{-1}(\mathbf{x}, j). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Здесь t - так называемое «медленное» время, $t = a \cdot t$. В соответствии с принципом максимума Понтрягина введем вектор сопряженных переменных \mathbf{Y} и запишем Гамильтониан системы (1.14):

$$\begin{aligned} H &= \mathbf{y}^T (a w^{-1}(x, j) \cdot \mathbf{X}(x, j, u(t))) + \\ &+ \mathbf{y}_r \cdot a w^{-1}(x, j) - a w^{-1}(x, j) \cdot F_0(x, j, u) = \\ &= aF(x, j, \mathbf{y}, u). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Определим локально-оптимальное управление \mathbb{W} из условия максимума Гамильтониана на отрезке $j \in [0, 2p]$. Проведем затем процедуру усреднения исходной и сопряженной систем по быстро меняющейся переменной j . Усредненная система уравнений будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dj} &= \frac{a}{2p} \int_0^{2p} w^{-1}(\mathbf{x}, j) \cdot \mathbf{X}\left(\hat{\mathbf{x}}, j, \mathbb{W}\left(\hat{x}, \hat{\mathbf{y}}, j\right)\right) dj, \\ \frac{d\hat{\mathbf{y}}}{dj} &= \frac{a}{2p} \int_0^{2p} F_x\left(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}, \mathbb{W}\left(\hat{x}, \hat{\mathbf{y}}, j\right)\right) dj, \\ \frac{dt}{dj} &= \frac{a}{2p} \int_0^{2p} w^{-1}\left(\hat{x}, j\right) dj, \end{aligned} \quad (1.16)$$

а усредненный критерий оптимальности

$$J = \frac{a}{2p} \int_0^T \int_0^{2p} F_0\left(\hat{\mathbf{x}}, \mathbb{W}\left(\hat{x}, \hat{\mathbf{y}}, j\right)\right) dj dt. \quad (1.17)$$

Интегралы в правых частях системы (1.16) образуют совокупность так называемых «усредняющих интегралов»:

$$\Phi = \int_0^{2p} (\cdot) dj, \quad \Phi = (\Phi_j)^T, \quad j = \overline{1, 2n+1}. \quad (1.18)$$

После усреднения правые части системы (1.16) не содержат циклической переменной j . Поэтому модель «медленной» эволюции вектора состояния и вектора сопряженных переменных может быть представлена в виде системы интегро-дифференциальных уравнений с «медленным» временем в качестве независимой переменной:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{q}_j}{dt} &= \frac{\Phi_j\left(\hat{z}\right)}{\Phi_{2n+1}\left(\hat{z}\right)}, \quad \text{где } \hat{q} = \left(\hat{x}, \hat{\mathbf{y}}\right)^T, \\ j &= \overline{1, 2n+1}, \quad \Phi_{2n+1} = \int_0^{2p} w^{-1}\left(\hat{x}, j\right) dj. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Исходная оптимизационная задача сводится, таким образом, к решению краевой задачи для системы (1.16, 1.17). Однако вычисление усредняющих интегралов (1.18) представляет самостоятельную проблему и требует разработки специальных процедур.

1.4. Приближенный метод решения динамической задачи (метод разбиения)

Пусть движение КА описывается системой дифференциальных уравнений (1.2). Откажемся от получения универсального решения для всего пространства переменных и поставим цель определить ряд упрощенных решений для каждой отдельной выделенной области X пространства состояний. Разобьем допустимую область фазового пространства переменных на m подобластей таких, что $X \subseteq X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup \dots \cup X_m$. Заменим исходную двухточечную краевую задачу на многоэтапную последовательность переходов:

$$x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_{m-1} \rightarrow x_K,$$

где $x_R = \{x_1, x_2, \dots, x_{m-1}\}$ - граничные условия промежуточных (нефиксированных) состояний:

$$\begin{aligned} x_1 &\in X_1 \cap X_2, \\ x_2 &\in X_2 \cap X_3, \\ &\dots\dots\dots \\ x_{m-1} &\in X_{m-1} \cap X_m. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Таким образом, сложный динамический маневр представим в виде последовательности маневров с параметрами

$$\begin{aligned} z_1 &= \{x_0, x_1\}^T, \\ z_2 &= \{x_1, x_2\}^T, \\ &\dots\dots\dots \\ z_m &= \{x_{m-1}, x_K\}^T. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Функция управления для единичного маневра z_i определяется из условия минимума функционала

$$\tilde{u}_i = \arg \min_{(u, x) \in D_i} J_i(z_i, x, u), \quad (1.22)$$

где $D_i \subseteq U \times \dot{E}X$ - допустимая область управлений и состояний.

В результате получается динамическая характеристика единичного маневра

$$S_i = \min_{(u, x) \in D_i} J_i(z_i, x, u). \quad (1.23)$$

Для получения аналитических решений данной задачи по участкам в зависимости от вида выделенной области X_i возможны различные подходы.

1.5. Метод последовательных расширений

Метод последовательных расширений предполагает поэтапную редукцию математической модели задачи оптимизации (временное отбрасывание связей и ограничений; усреднение движений, носящих циклический характер; линеаризацию движения в окрестности опорной орбиты и т. д.); получение последовательности моделей различного уровня сложности, сохраняющих, однако, все важ-

нейшие особенности исходной модели. Затем определяется структура оптимального управления в рамках упрощенной модели, а также приближенных аналитических зависимостей критерия оптимальности (функционала) вариационной задачи от граничных условий динамического маневра; синтезирующая функция и ее частные производные по компонентам вектора состояния в аналитическом виде; проводится построение оценочной функции режимов управления.

В первом приближении выбор проектных и баллистических параметров, а также траекторий и управлений осуществляется с использованием простейших проектных и динамических моделей, например, представляющих КА точкой переменной массы с «бесплатным» управлением. Последующие приближения используют более сложные модели, учитывающие, например, динамику углового движения КА, возмущающие ускорения от гравитационных, аэродинамических и иных сил.

В результате реализуется схема, основанная на использовании последовательности усложняющихся моделей управляемого движения: в качестве первого приближения используются приближенно оптимальные решения для упрощенных моделей, приближенный синтез управления; затем модель динамической задачи последовательно усложняется, а решение, полученное на предыдущей итерации, используется для оценок и сравнения различных режимов управления.

1.6. Итерационная процедура поэтапной оптимизации

Поскольку проектные параметры КА влияют на динамическую характеристику маневра, и наоборот, баллистическая схема и траектории перелета существенным образом влияют на выбор проектных параметров, процесс оптимизации параметров КА и семейства оптимальных траекторий необходимо вести совместно.

Ключевая идея предлагаемого подхода состоит в условном разделении общей проблемы оптимизации на динамическую и параметрическую части с последующим их объединением через динамическую характеристику маневра, являющуюся мерой затрат

на его реализацию, зависящую от граничных условий, проектных параметров и неопределенных факторов, и уточняемую по мере перехода от простых моделей динамической задачи к более сложным.

Зададим последовательность математических моделей $\{M^s\}$, $s=1, 2, \dots$ динамической задачи для конкретного маневра z из подмножества Z . В рамках каждой из моделей M^s определим критерий оптимальности динамической задачи – функционал $J(z, p, x, u, v)$, а также множество допустимых траекторий и управлений D_s и получим динамическую характеристику маневра $S^{(s)}(z, p, u_*)$. Пусть в результате решения совокупности динамических задач с применением моделей $\{M^s\}$ получена последовательность значений глобального критерия оптимальности m : $\{m^{(s)}\} = \{m^{(s)}(z, p, S^{(s)}(z, p, u_*))\}$, $s=1, 2, \dots$ и определен вектор оптимальных проектных параметров согласно выражению

$$\bar{p}^{(s)} = \arg \max_{p \in P_s} m(z, p, S^{(s)}(z, p, u_*)).$$

Процесс оптимального синтеза назовем устойчивым, если сколь угодно малым приращениям вектора проектных параметров соответствуют малые изменения критерия μ . Процесс заканчивается, когда применение модели более высокого уровня не приводит к заметному изменению критерия оптимальности μ и вектора проектных параметров p .

В качестве первого приближения используются приближенно оптимальные решения для упрощенных моделей, строится приближенный синтез управления. Затем модель динамической задачи последовательно усложняется.

Влияние неконтролируемых факторов приводит к неопределенности динамической характеристики маневра в пределах нижних и верхних границ ее изменения S_H, S_B , которые в свою очередь определяются размерами области неопределенности Ω . Сначала анализируются пределы изменения динамической характеристики

$$S_H(z, p) \leq S(z, p, u) \leq S_B(z, p)$$

и выбираются проектные решения i -го приближения $\bar{p}_1^{(i)}, \bar{p}_2^{(i)}$, соответствующие предельным оценкам S_H, S_B :

$$\bar{p}_1^{(i)} = \arg \max_{p \in P} m(z, p, S_H(z, p)),$$

$$\bar{p}_2^{(i)} = \arg \max_{p \in P} m(z, p, S_B(z, p)). \quad (1.24)$$

Соответственно, будем иметь критерии оптимальности для двух вариантов решений:

$$m_1^{(i)} = m(z, p_1^{(i)}), \quad m_2^{(i)} = m(z, p_2^{(i)}). \quad (1.25)$$

Сравнение компонентов векторов $\bar{p}_1^{(i)}, \bar{p}_2^{(i)}$ и критериев $m_1^{(i)}, m_2^{(i)}$ позволяет установить влияние неопределенности на облик проектируемого КА и показатель его эффективности.

На следующих итерациях уточнение проектных параметров приводит к необходимости повторного расчета семейства оптимальных траекторий и режимов управления, а также баллистических параметров.

1.7. Проектная модель космического аппарата с электрореактивной двигателем малой тяги

Для выбора оптимальных проектных параметров КА представим его стартовую массу как сумму масс отдельных систем. Анализ работ в области оптимизации КА с ЭРД малой тяги позволяет выделить следующие элементы: 1) энергоустановку, состоящую из источника и преобразователя энергии; 2) ДУ, включающую маршевые и управляющие двигатели вместе с исполнительными органами (кардановым подвесом); 3) рабочее тело, необходимое для осуществления перелета с учетом затрат на управление; 4) систему подачи и хранения рабочего тела (баки, трубопроводы и др.); 5) полезный груз; 6) корпус и прочие элементы конструкции.

Уравнение баланса масс на начальной орбите имеет вид

$$M_0 = M_{\text{ПГ}} + M_{\text{Э}} + M_{\text{Д}} + M_{\text{СПХ}} + M_{\text{Т}} + M_{\text{К}}, \quad (1.26)$$

где M_0 - начальная масса, $M_{ПГ}$ - масса полезного груза, $M_{Э}$ - масса источника и преобразователя энергии, $M_{Д}$ - масса ДУ, $M_{СПХ}$ - масса системы подачи и хранения рабочего тела, M_T - масса рабочего тела, M_K - масса корпуса, прочих элементов и систем.

Определим вектор параметров КА:

$$p = (P, P_{УПР}, N, r_{УПР}, r_M, I_0), \quad (1.27)$$

где P - тяга маршевых двигателей, $P_{УПР}$ - тяга управляющих двигателей, N - мощность энергоустановки, $r_{УПР}$ и r_M - векторы, характеризующие расположение относительно центра масс точек крепления управляющих и маршевых двигателей, I_0 - тензор инерции. Компонентами этого вектора p являются параметры, наиболее полно характеризующие КА, его схему управления, массу, компоновку, энергетическую и двигательную установки и пр.

Массы отдельных компонентов КА зависят от проектных параметров. Обычно применяются следующие зависимости.

$$M_{Э} = a_{ЭУ} N, \quad M_{Д} = g_{ДУ} (P + k P_{УПР}), \quad (1.28)$$

$$M_{СПХ} = g_{СПХ} M_T, \quad M_K = g'_K P + g''_K N,$$

где $a_{ЭУ}$, $g_{ДУ}$, $g_{СПХ}$, g'_K , g''_K - соответствующие удельные массовые характеристики. Мощность энергоустановки зависит от тяги двигателей и скорости истечения рабочего тела

$$N = \frac{Pc}{2} \frac{1+c}{h_T h_{ПЭ}}, \quad (1.29)$$

где $c = \frac{P_{УПР}}{P}$ характеризует относительный расход массы управляющих двигателей, h_T - тяговый коэффициент полезного действия, $h_{ПЭ}$ - КПД преобразователя энергии.

Введем в рассмотрение вектор управлений: $\bar{u} = \{\bar{e}, \bar{e}_{УПР}, \bar{d}_{УПР}, \bar{M}_{УПР}\}^T$, где \bar{e} и $\bar{e}_{УПР}$ - направления маршевого и управляющего век-

тора тяги, $\bar{d}_{УПР}$ и $\bar{M}_{УПР}$ - функция включения-выключения и величина управляющего момента, соответственно. При жестком креплении двигателей $\bar{u} = \{\bar{d}_{УПР}, \bar{M}_{УПР}\}^T \in U$.

Основная задача оптимизации формулируется следующим образом: определить из допустимого множества P вектор проектных параметров \bar{p} и вектор функций управления $\bar{u}(t) \in U$, доставляющие при заданной массе полезного груза и заданном времени перелета T минимум начальной массе КА при выполнении граничных условий переходов:

$$M_0 = \min_{\bar{p} \in P, \bar{u}(t) \in U} M_0(\bar{p}, \bar{u}(t), T, M_{ПГ}). \quad (1.30)$$

Для выделения динамической задачи оптимизации введем в рассмотрение «приведенную» характеристическую скорость — меру энергетических затрат на управление движением — динамическую характеристику маневра:

$$V_X = \int_0^t \frac{P}{M} \left(1 + \frac{q_{УПР}}{q} |d_{УПР}| \right) dt, \quad (1.31)$$

где q , $q_{УПР}$ - соответственно секундные расходы рабочего тела маршевых и управляющих двигателей.

Проблема оптимизации разделяется на две независимые:

1) **динамическую** - нахождение оптимальных программ управления:

$$\begin{aligned} \bar{u}_{opt1}(t, p) &= \arg \min_{\bar{u} \in U} V_{ХК1}(\bar{u}, \bar{p}, \bar{x}_0, \bar{x}_K), \\ \bar{u}_{opt2}(t, p) &= \arg \min_{\bar{u} \in U} V_{ХК2}(\bar{u}, \bar{p}, \bar{x}_0, \bar{x}_K) \end{aligned} \quad (1.32)$$

и получение динамической характеристики перелета:

$$V_{ХК}(\bar{u}_{opt}(t), \bar{p}, \bar{x}_0, \bar{x}_K) = \bar{V}_{ХК}(\bar{p}, \bar{x}_0, \bar{x}_K); \quad (1.33)$$

2) **параметрическую** - нахождение оптимальных проектных параметров КА:

$$\bar{p}_{opt} = \arg \min_{\bar{p} \in P} M_0[\bar{V}_{ХК}(\bar{p}, \bar{x}_0, \bar{x}_K), \bar{p}, T, M_{ПГ}]. \quad (1.34)$$

1.8. Оценки перелетов с малой тягой на расширенном множестве допустимых траекторий и управлений

Рассмотрим задачу перехода КА с двигателем МТ из одной точки пространства (r_0, V_0) в другую точку (r_k, V_k) за заданное время $T = t_k - t_0$. Пусть требуется обеспечить минимум некоторого функционала I . Полагаем, что уравнения движения заданы в форме векторных дифференциальных уравнений, описывающих движение ЦМ и угловое движение КА, причем граничные условия для ориентации КА и для угловой скорости не заданы.

Нетрудно проследить связь данной постановки задачи с другими, которые уже рассматривались в литературе. Исключив из системы, описывающей движение КА, уравнения, описывающие его угловое движение, получим расширение множества допустимых траекторий и управлений D до некоторого множества E (поскольку исключены некоторые связи). Очевидно, что $\min_E I \leq \min_D I$.

Однако ясно, что случай, когда направление тяги является независимым управлением, а не фазовой координатой, соответствует традиционной постановке задач оптимизации траекторий в механике полета, когда не учитывается угловое движение КА, а вектор тяги может произвольно менять свою ориентацию в пространстве.

Таким образом, данное соотношение служит априорной оценкой функционала на расширенном множестве допустимых траекторий и управлений E . Такая оценка может оказаться полезной и содержательной в случае, когда на управляющий момент не накладывается слишком жестких ограничений. В противном случае степень неоптимальности управляемого движения может оказаться завышенной. Однако отыскание $\min_E I$ требует точного решения задачи оптимального управления движением ЦМ, которая сама по себе является достаточно сложной.

При отсутствии ограничений на направление вектора тяги $e(t)$ в связанной системе

координат (СК) ориентация вектора тяги в пространстве не зависит от углового положения КА, и управление траекторией осуществляется независимо от его движения относительно ЦМ.

Если направление тяги фиксировано в связанной СК (двигатель жестко закреплен относительно корпуса КА), то $\left(\frac{de}{dt}\right)_{CB} \equiv 0$.

В этом случае изменение направления вектора тяги в пространстве осуществляется только за счет разворота корпуса КА. В этом случае удобно считать, что тяга направлена вдоль одной из связанных осей, например,

$$OX_1 (e \equiv i_1). \text{ Тогда } \frac{de}{dt} = w \times e.$$

Если вектор тяги сохраняет неизменное положение в неподвижной СК, получим выражение $\left(\frac{de}{dt}\right)_{CB} = -w \times e$, определяющее кинематику программного разворота тяги относительно корпуса.

1.9. Математическая модель для оптимизации совместного управления траекторным и угловым движением

Общей тенденцией развития перспективных КА с ЭРД является увеличение их масс и моментов инерции, что, в свою очередь, создает ряд проблем управления движением. Конструктивные схемы тяжелых КА, как правило, предусматривают жесткое закрепление связки двигателей относительно корпуса. Изменение направления тяги реализуется при этом путем разворота корпуса КА в пространстве с помощью управляющего момента, величина которого ограничена.

Если момент создается самими маршевыми двигателями, то расход рабочего тела на управление отсутствует. Назовем такую схему управления траекторным и угловым движением **совместной**.

Раздельной схемой управления будем называть такую схему, которая предполагает использование специальных двигателей, создающих только момент относительно центра масс. Это связано с дополнительными затратами рабочего тела.

Для задач совместного управления траекторным и угловым движением КА используем модель, учитывающую динамику движения относительно центра масс, ограничения на ориентацию вектора тяги, зависимость тяги двигателя от расстояния КА до Солнца и от ориентации солнечных батарей, влияние несферичности Земли и сопротивления верхних слоев атмосферы, влияние гравитационных полей Солнца и планет и другие факторы:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{r}}{dt} &= \bar{V}; \quad \frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{a} + \bar{g} + \bar{f} = \frac{P}{m} \mathbf{d} \cdot \bar{e} + \bar{g} + \bar{f}; \\ \frac{d\bar{\omega}}{dt} &= I_0^{-1}(\bar{M}_0 - \bar{\omega} \times I_0 \bar{\omega}); \\ \frac{d\bar{i}_1}{dt} &= \bar{\omega} \times \bar{i}_1; \quad \frac{d\bar{j}_1}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{j}_1; \quad \frac{d\bar{k}_1}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{k}_1; \quad (1.35) \\ \frac{dm}{dt} &= -(q + q_{yup}) = -\left(\frac{P}{c} \mathbf{d} + q_{yup} \mathbf{d}_{yup}\right), \end{aligned}$$

где \bar{r} - вектор положения ЦМ; \bar{a} , \bar{g} , \bar{f} - векторы реактивного, гравитационного и возмущающих ускорений; $P = c \cdot q$ - тяга маршевого двигателя; \bar{e} - единичный вектор направления тяги; \mathbf{d} - функция включения-выключения и реверса тяги маршевого двигателя; q_{yup} и \mathbf{d}_{yup} - секундный расход и функция включения-выключения управляющего двигателя; $\bar{\omega}$ - вектор угловой скорости; $(\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{k}_1)$ - единичные векторы вдоль связанных осей; $I_0 = I_0[m(t)] = I_0(t)$ - матрица тензора инерции. Главный момент внешних сил M_0 представлен в виде суммы:

$$M_0 = M_{yup} + H,$$

где M_{yup} - вектор управляющего момента, H - вектор момента от гравитационных, аэродинамических и иных внешних сил.

Необходимые условия реализации программных разворотов КА записываются в виде

$$\bar{M}_{yup} \geq I_0 \frac{d\bar{\omega}}{dt} - H + \bar{\omega} \times I \bar{\omega}. \quad (1.36)$$

1.10. Математическая модель для совместной оптимизации траекторий и ориентации солнечных батарей

Электрическая мощность, вырабатываемая солнечными батареями (СБ) на освещенных участках траектории, зависит от угла b между направлением на Солнце и нормалью к поверхности батарей: $N = N_{max} \cos b$. Задачей управления ориентацией СБ является обеспечение максимального значения $\cos b$.

Положение СБ относительно корпуса КА будем характеризовать двумя углами (рис. 1.2): g_{CB} - угол крена оси батареи, который составлен осью вращения батареи OZ_{CB} и поперечной осью КА OZ_j ; j_{CB} - угол собственного вращения батареи, характеризующий поворот нормали OY_{CB} к плоскости батареи вокруг ее собственной оси OZ_{CB} . Очевидно, с помощью последовательных поворотов на углы g_{CB} и j_{CB} можно добиться постоянного направления нормали Y_{CB} на Солнце. При этом следует учитывать, что КА одновременно осуществляет программу разворота по углу u .

Запишем выражения для проекций единичного вектора OY_{CB} нормали к плоскости СБ на оси орбитальной СК $OXYZ$:

$$\begin{aligned} n_x &= \cos j_{CB} \cos y - \sin g_{CB} \sin j_{CB} \sin y, \\ n_y &= \cos g_{CB} \sin j_{CB}, \\ n_z &= \cos j_{CB} \sin y + \sin g_{CB} \sin j_{CB} \cos y. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Будем считать, что в каждый момент известны компоненты единичного вектора $r_s = (r_{sx}, r_{sy}, r_{sz})$ направления на Солнце в орбитальной СК. Максимальная мощность реализуется при $\cos b = n \cdot r_s = 1$. Для этого случая выражения для программных углов ориентации солнечных батарей имеют вид:

$$\begin{aligned} j_{CB} &= \arccos(r_{sx} \sin y + r_{sz} \cos y), \\ g_{CB} &= \arccos \frac{r_{sx}}{\sin j_{CB}}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Однако двухканальное управление ориентацией солнечных батарей в сочетании со

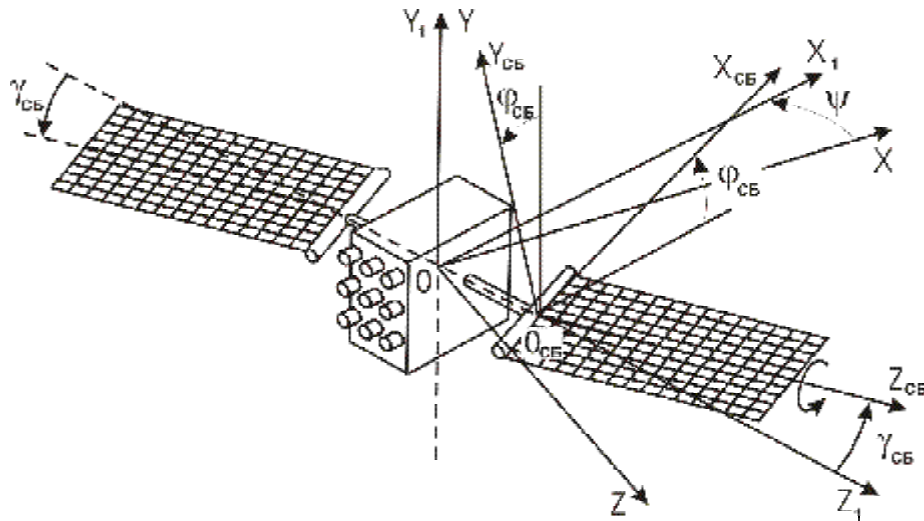


Рис. 1.2. Параметры углового положения КА и солнечных батарей

сложной программой изменения положения корпуса КА в пространстве может оказаться трудным для реализации. В этом случае рассматриваются альтернативные варианты одноканального управления: 1) батареи вращаются только вокруг оси $OZ_{СБ}$, постоянно совпадающей с поперечной осью OZ_1 ($g_{СБ} = 0$); в этом случае угол $j_{СБ}$ обозначим через j_1 ; 2) ось вращения батарей совпадает с направлением связанной оси OY_1 , а значит, и оси OY ; $g_{СБ} \equiv p/2$; в этом случае угол собственного вращения обозначим через j_{II} . Очевидно, для этих двух вариантов $\cos b_{I,II} < 1$.

Получим выражение для $\cos b_1$ и для этого в (1.38) положим $g_{СБ} = 0$. Для обеспечения максимума $\cos b_1$ найдем оптимальное значение j_1 :

$$j_{opt} = \arctg \frac{r_{SY}}{r_{SX} \cos y + r_{SZ} \sin y}. \quad (1.39)$$

При этом

$$\cos b_{imax} = \sqrt{r_{SY}^2 + (r_{SX} \cos y + r_{SZ} \sin y)^2}. \quad (1.40)$$

Для второй схемы управления $\cos b_{II}$ не зависит от углового положения КА. Положим $g_{СБ} \equiv p/2$, и тогда

$$j_{II} = \arctg \frac{r_{SZ}}{r_{SX}} - y, \quad \cos b_{II} = \sqrt{r_{SX}^2 + r_{SY}^2}. \quad (1.41)$$

С учетом возможности выключения двигателя при попадании аппарата в тень Земли целесообразно анализировать поведение среднего за виток косинуса угла b . Освещенность КА зависит от взаимного положения Солнца и оскулирующей плоскости орбиты. Поскольку оно меняется в процессе полета, на отдельных этапах перелета может оказаться более выгодной первая схема одноканального управления СБ, а на других - вторая. Поскольку целью управления СБ является обеспечение максимальной мощности, можно рассмотреть также комбинированную схему, при которой возможны развороты аппарата по крену на $\pm 90^\circ$ при смене знака разности $(\cos b_1 - \cos b_{II})$.

1.11. Математическая модель для оптимального управления околоземными орбитами на больших интервалах времени

Характерной особенностью задач управления движением КА на низкой околоземной орбите является наличие возмущающих ускорений, обусловленных нецентральностью гравитационного поля Земли и сопротивлением верхних слоев атмосферы, сравнимых с величиной реактивного ускорения. Модель задачи оптимизации становится при этом достаточно сложной, а эллиптичность орбиты требует аккуратного описания «медленной» эволюции орбиты на больших интервалах времени. В этих задачах на первый план выходит стратегия гарантированного результата как при выборе законов управле-

ния, так и при оптимизации параметров корректирующей ДУ.

Для задачи совместного управления оскулирующими элементами орбиты (A, e, W, i), а также относительным угловым положением Δu КА, обеспечивающего минимум характеристической скорости, с использованием метода усреднения была получена структура оптимального управления на отдельном витке орбиты, показанная на рис. 1.3. Здесь h - эксцентрисическая аномалия центра разгонного участка ($a_x > 0$), x - половина ширины разгонного участка для трансверсальной тяги, a - ширина одного пассивного участка трансверсальной тяги; z - аргумент широты центра участка с $a_z > 0$, j - половина ширины рабочего участка с $a_z > 0$, b - ширина одного пассивного участка для бинормальной составляющей тяги.

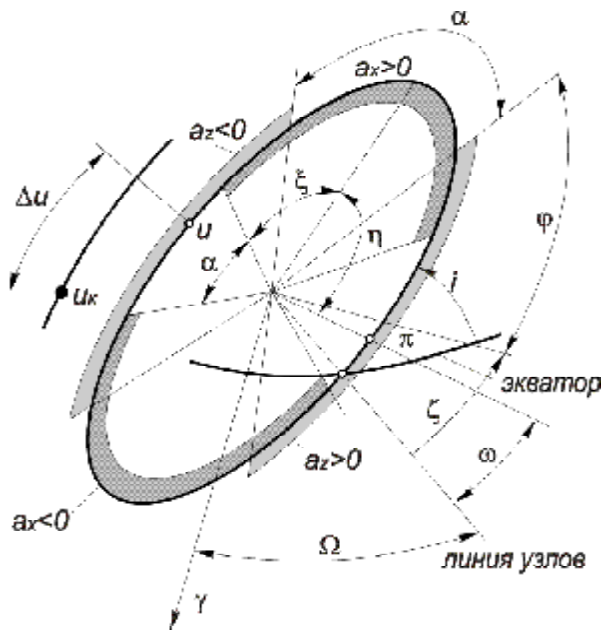


Рис. 1.3. Полученная структура оптимального управления на витке

Для этой структуры управления получена математическая модель эволюции орбиты в поле земного сфероида с учетом возмущающего влияния атмосферы и малой тяги с оптимальной структурой управления:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \frac{4a_1}{p} \sqrt{\frac{A^3}{m}} \left(x + \frac{a-p}{2}\right) - 2sr_{cp} \sqrt{mA}, \\ \frac{de}{dt} &= \frac{a_1}{p} \sqrt{\frac{A}{m}} \left[-3e\left(x + \frac{a-p}{2}\right) + 4 \sin\left(x + \frac{a}{2}\right) \cos \frac{a}{2} \cosh - \right. \\ &\quad \left. - \frac{e}{2} \sin 2\left(x + \frac{a}{2}\right) \cos a \cos 2h\right] - 2esr_{cp} \sqrt{\frac{m}{A}}, \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{a_1}{pe} \sqrt{\frac{A}{m}} \left[4 \sin\left(x + \frac{a}{2}\right) \cos \frac{a}{2} \sinh - \right. \\ &\quad \left. - \frac{e}{2} \sin 2\left(x + \frac{a}{2}\right) \cos a \sin 2h\right] + \frac{e(5 \cos^2 i - 1)}{2m^{0.5} A^{3.5}}, \\ \frac{d\Delta u}{dt} &= \sqrt{m} (A^{-1.5} - A_K^{-1.5}), \end{aligned} \quad (1.42)$$

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= \frac{a_3}{p} \sqrt{\frac{A}{m}} \left[2 \sin\left(j + \frac{b}{2}\right) \cos \frac{b}{2} \cos z - 3I_1\left(j + \frac{b}{2} - \frac{p}{2}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{2} \sin 2\left(j + \frac{b}{2}\right) \cos b \cdot (I_1 \cos 2z + I_2 \sin 2z)\right], \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{a_3}{p \sin i} \sqrt{\frac{A}{m}} \left[2 \sin\left(j + \frac{b}{2}\right) \cos \frac{b}{2} \sin z - 3I_2\left(j + \frac{b}{2} - \frac{p}{2}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{2} \sin 2\left(j + \frac{b}{2}\right) \cos b \cdot (I_2 \cos 2z + I_1 \sin 2z)\right] - \frac{e \cos i - 1}{m^{0.5} A^{3.5}}, \end{aligned}$$

где a_1, a_3 - составляющие ускорения, направленные по трансверсали и бинормали, соответственно.

1.12. Математическая модель для оптимизации управления относительным движением КА

В качестве основной будем рассматривать схему управления относительным движением двух КА. Один из них считается пассивным (КАI), а другой активным (КАII), снабженным ЭРД.

Рассмотрим возмущенное движение КА в цилиндрической системе координат ruz , где r - расстояние от центра Земли до проекции КА на плоскость невозмущенной круговой орбиты, u - угол, отсчитываемый в плоскости невозмущенной орбиты от некоторой начальной оси по направлению полета спутника, z - расстояние от плоскости невозмущенной орбиты до КА. Считая, что величина $\frac{z}{r}$ мала, запишем уравнения движения в виде:

$$\frac{dr}{dt} = V_r, \quad \frac{du}{dt} = \frac{V_u}{r}, \quad \frac{dz}{dt} = V_z,$$

$$\frac{dV_r}{dt} = \frac{V_u^2}{r} - \frac{m}{r^2} + S, \quad \frac{dV_u}{dt} = -\frac{V_r V_u}{r} + T, \quad (1.43)$$

$$\frac{dV_z}{dt} = -\frac{m}{r^3} z + W.$$

Здесь S, T, W - проекции возмущающих и управляющих ускорений на оси орбитальной СК, V_r - радиальная скорость, V_u - трансверсальная скорость, V_z - нормальная скорость (проекция скорости на перпендикуляр к плоскости невозмущенной орбиты), m - гравитационный параметр, t - текущее время.

В большинстве практических задач эксцентриситет опорной орбиты невелик, и поэтому уравнения относительного движения записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{\Delta r} &= \Delta V_r, \\ \dot{\Delta L} &= \Delta V_u - I \Delta r, \\ \dot{\Delta V_r} &= 2I \Delta V_u - I^2 \Delta r + S, \\ \dot{\Delta V_u} &= -I \Delta V_r + T, \\ \dot{\Delta z} &= \Delta V_z, \\ \dot{\Delta V_z} &= -I^2 \Delta z + W. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Здесь $I = \sqrt{\frac{m(1-e^2)}{p^3}}$ - средняя угловая скорость движения КА по опорной орбите; $\Delta L = \Delta u \cdot r$ - проекция расстояния между КА на дугу опорной орбиты.

1.13. Математическая модель для оптимизации перелетов между орбитами с большими эксцентриситетами

Для задач оптимизации перелетов между орбитами с большими эксцентриситетами можно рассматривать два варианта ориентации вектора тяги: свободная ориентация и ориентация по трансверсали.

Изменение оскулирующих элементов кеплеровской орбиты описывалось с использованием усредненных уравнений, полученных на основе стандартной процедуры усреднения уравнений в оскулирующих элементах для плоского движения КА:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dV_x} &= \frac{1}{p} \sqrt{A^3/m} (e \cdot J_1 + \sqrt{1-e^2} \cdot J_2), \\ \frac{de}{dV_x} &= \frac{1}{2p} \sqrt{A/m} \sqrt{1-e^2} \times \\ &\times \left[\sqrt{1-e^2} \cdot J_1 + 2J_3 - e \cdot (J_4 - J_2) \right], \\ \frac{dw}{dV_x} &= \frac{1}{2pA} \sqrt{A/m} \sqrt{1-e^2} \times \\ &\times \left\{ -J_5 + eJ_6 + \sqrt{1-e^2} \left(1 + \frac{1}{1-e^2} \right) J_7 - \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} J_8 \right\}, \end{aligned}$$

$$J_j = \int_0^{2p} \Phi_j(\Theta, E) dE, \quad j = \overline{1,8}. \quad (1.45)$$

Здесь m - гравитационный параметр Земли, q - угол, характеризующий ориентацию тяги в плоскости орбиты относительно трансверсали, E - эксцентрическая аномалия, J_1, \dots, J_8 - усредняющие интегралы - функции параметров управления.

1.14. Модели для оптимизации межпланетных перелетов с малой тягой

Граничные условия межпланетного перелета определяются его целью и относительными положениями планет старта, финиша и КА. Обычно траектория движения разбивается на участки движения в сферах действия планет и Солнца и оптимальное движение рассчитывается по участкам. На границах участков необходимо осуществлять стыковку траектории по фазовым координатам и массе КА.

Особенностью оптимизации замкнутых межпланетных перелетов (с возвращением КА на планету старта) является дополнительное условие равенства угловых перемещений аппарата и планеты старта в конечный момент времени:

$$(T_2 + T_4) \cdot w_3 - (j_2 + j_4) + T_3 (w_3 - w_M) = 2p \cdot n. \quad (1.46)$$

Здесь j_2 и j_4 - угловые дальности прямого и обратного гелиоцентрических перелетов, w_3 и w_M - средние угловые скорости движения Земли и Марса, n - произвольное целое число. Появляется неоднозначность решения целевой задачи в зависимости от $t = T_2/T_4$ - соотношения длительностей прямого и обратного перелетов и D_0 - даты старта. Это приводит к необходимости введения и последующей оптимизации дополнительных параметров, описывающих баллистическую схему перелета $\bar{b} = \{D_0, t\}^T$.

Задача проектно-баллистической оптимизации межпланетного перелета формулируется следующим образом. Требуется определить вектор проектных параметров $\bar{p} = \{P_0, c\}^T \in P$, вектор баллистических параметров $\bar{b} = \{D_0, t\}^T \in B$ и вектор функций управления $\bar{u}(t) = \{\bar{e}(t), d(t)\}^T \in U$, доставляющие при заданных массе полезного груза $M_{ПГ}$ и длительности перелета T_Σ минимум стартовой массе КА и обеспечивающие выполнение целевой задачи, описываемой множеством допустимых фазовых координат аппарата X :

$$M_0 = \underset{\bar{p} \in P, \bar{b} \in B, \bar{u}(t) \in U}{\text{Min}} M_0(\bar{p}, \bar{b}, \bar{u}(t)) | M_{ПГ} = \text{fixe}, T_\Sigma = \text{fixe}, x \in X. \quad (1.47)$$

Задачи оптимизации пилотируемых экспедиций наиболее сложны, так как множество допустимых фазовых координат кроме граничных условий прямого и обратного перелетов содержат специфические ограничения, связанные с обеспечением безопасности экипажа (ограничения на суммарную длительность экспедиции $T_\Sigma \leq T_{\text{ПРЕД}}$, минимально-допустимое расстояние от КА до Солнца $|\bar{R}| \geq R_{\text{ПРЕД}}$, длительность нахождения в радиационных поясах Земли и др).

Для разделения задачи оптимизации на параметрическую и динамическую части вводится промежуточный критерий оптимизации – приведенное моторное время:

$$T_m^* = \int_0^{T_\Sigma} c(R) \cdot d \, dt, \quad (1.48)$$

где $c(R)$ - коэффициент, учитывающий падение мощности энергоустановки, а следовательно, тяги двигателей и расхода рабочего тела в зависимости от расстояния от КА до Солнца. Для КА с ядерными источниками энергии $c(R) \equiv 1$, для КА с солнечной энергоустановкой

$$c(R) = \frac{P(R)}{P_0} = \frac{N(R)}{N_0} \approx \frac{1}{R^{1.7}}. \quad (1.49)$$

Этот критерий непосредственно определяет суммарные затраты рабочего тела

$M_T(\bar{p}) = \frac{P_0}{c} \cdot T_m^*(\bar{p})$ на перелет и, следовательно, является динамической характеристикой маневра.

Баллистическая часть задачи оптимизации состоит в определении вектора функций управления $\bar{u}(t) = \{\bar{e}(t), d(t)\}^T$ и вектора баллистических параметров $\bar{b} = \{D_0, t\}^T$ (для замкнутых перелетов), обеспечивающих выполнение целевой задачи с минимальными затратами рабочего тела при фиксированных проектных параметрах КА, и построении зависимости

$$T_m^*(\bar{p}) = \underset{\bar{b} \in B, \bar{u}(t) \in U}{\text{Min}} T_m^*(\bar{b}, \bar{u}(t)) | \bar{p} = \text{fixe}, T_\Sigma = \text{fixe}, x \in X).$$

Проектная часть задачи оптимизации состоит в выборе вектора проектных параметров $\bar{p} = \{P_0, c\}^T$, обеспечивающих минимум стартовой массе КА с учетом полученной зависимости.

Баллистическая часть задачи оптимизации решается в соответствии с разработанным подходом, связанным с использованием последовательности усложняющихся моделей.

Модель А описывает движение аппарата в рамках теории сфер действия в центральном поле притяжения Солнца и планет без учета возмущений от других притягива-

ющих центров в плоской полярной СК. Орбиты планет считаются круговыми и компланарными. Стыковка плането- и гелиоцентрических участков осуществляется только по массе КА.

В рамках модели Б движение КА разделяется, в соответствии с теорией сфер действия, на гелио- и планетоцентрические участки, и при этом на границах сфер действия проводится точная стыковка траекторий движения по координатам, скорости и массе КА. Орбиты планет считаются эллиптическими и некомпланарными. При расчете движения в сферах действия планет учитываются участки затенения, гравитационные возмущения от других небесных тел и нецентральности гравитационного поля планеты.

Модель В использует уравнения движения в поле притяжения нескольких тел (Солнце и планеты солнечной системы), учитывается эллиптичность и некомпланарность орбит планет, деградация СБ и другие факторы. При решении динамической части задачи учитываются ограничения на проектные и баллистические параметры и вектор управления, траектория рассматривается как непрерывная с оптимальной стыковкой участков.

Список литературы

1. Гродзовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В. Механика космического полета (проблемы оптимизации). - М.: Наука, 1975.
2. Лебедев В. Н. Расчет движения космического аппарата с малой тягой. - М.: ВЦ АН СССР, 1968.
3. Гурман В. И. Принцип расширения в задачах управления. - М.: Наука, 1985.
4. Кротов В. Ф., Гурман В. И. Методы и задачи оптимального управления. - М.: Наука, 1973.
5. Гурман В. М., Попов Ю. Б., Салмин В. В. О возможности реализации траекторий аппаратов с малой тягой с учетом их движения вокруг центра масс //Космические исследования. – 1970. Т.8, № 5. - С. 684-692.
6. Салмин В. В. Оптимизация режимов разгона вращающегося космического аппарата с двигателем малой тяги //Космические исследования. – 1973. Т. 11, № 8. - С. 842 – 853.
7. Брусов В. С., Салмин В. В. Комбинированная двигательная система, универсаль-

ная для диапазона маневров //Космические исследования. – 1974. Т. 12, № 3. - С. 368 – 373.

8. Васильев В. В., Салмин В. В. Оптимальный разгон космического аппарата с электрореактивным двигателем при ограниченной скорости поворота вектора тяги //Космические исследования. – 1976. Т. 14, № 3. - С. 336 – 342.

9. Салмин В. В. Многошаговые алгоритмы управления движением космических аппаратов //Космические исследования. – 1979. Т. 17, № 6. - С. 835 – 845.

10. Салмин В. В. Аналитическая оценка оптимальности многошаговых адаптивных алгоритмов управления //Космические исследования. – 1980. Т. 18, № 3. - С. 332 – 342.

11. Васильев В. В. Оптимальное управление эллиптической орбитой спутника Земли с двигателем малой тяги //Космические исследования. - 1980. Т. 18, №5. - С. 707 – 714.

12. Юрин В. В. Оптимальная коррекция параметров орбиты космического аппарата с двигателем малой тяги //Космические исследования. - 1983. Т. 21, №5. – С. 666 - 674.

13. Васильев В. В., Салмин В. В. Многошаговые алгоритмы коррекции орбиты спутника Земли двигателем малой тяги //Космические исследования. – 1984. Т.22, № 4. - С. 507 – 519.

14. Салмин В. В., Ишков С. А. Оптимальные программы управления в задаче межорбитального перелета с непрерывной тягой //Космические исследования. - 1984. Т. 22, № 5. – С. 702 – 711.

15. Васильев В. В., Салмин В. В. Выбор универсальных параметров двигателя малой тяги, предназначенного для поддержания орбиты спутника Земли//Космические исследования. – 1984. Т.22, № 6. – С. 858 – 866.

16. Салмин В. В. Оптимизация космических перелетов с малой тягой: Проблемы совместного управления траекторным и угловым движением.- М.: Машиностроение, 1987.

17. Ишков С. А., Салмин В. В. Оптимизация траекторий и параметров межорбитальных транспортных аппаратов с двигателями малой тяги //Космические исследования. – 1989. Т.27, №1. - С. 42-53.

18. Салмин В. В., Соколов В. О. Приближенный расчет маневров формирования

орбиты спутника Земли с двигателем малой тяги //Космические исследования. – 1991. Т. 29, № 6. - С. 872-888.

19. Ишков С. А. Сближение космических аппаратов с малой тягой на околокруговых орбитах //Космические исследования. – 1992. Т.30, № 2. - С. 165 – 179.

20. Ишков С. А., Милокумова О. Л., Салмин В. В. Оптимизация замкнутых межпланетных перелетов Земля-Мартс-Земля с малой тягой //Космические исследования. - 1995. Т.33, №2, - С. 210 - 218.

21. Ишков С. А. Расчет оптимальных межорбитальных перелетов с малой трансверсальной тягой на эллиптическую орбиту //Космические исследования. – 1997. Т.35, № 2. - С. 178 - 188.

22. Ишков С. А., Романенко В. А. Формирование и коррекция высокоэллиптичес-

кой орбиты спутника Земли с двигателем малой тяги //Космические исследования. – 1997. Т.35, № 2. - С. 11 - 20.

23. Салмин В. В., Старинова О. Л. Оптимизация межпланетных перелетов КА с двигателями малой тяги с учетом эллиптичности и некомпланарности орбит планет //Космические исследования. - 2001. Т.39, № 1. - С. 51 - 59.

24. Храмов А. А., Ишков С. А. Расчет маневров коррекции слабоэллиптических и круговых орбит с двигателем малой и конечной тяги // Известия Самарского научного центра РАН. – 2002. Т.4, №1. - С. 144-152.

25. Салмин В. В., Ишков С. А., Старинова О. Л. Методы решения вариационных задач механики космического полета с малой тягой. – Самара: Издательство Самарского научного центра РАН, 2006.