

ОПТИМИЗАЦИЯ ПЕРЕЛЕТОВ МЕЖДУ НЕКОМПЛАНАРНЫМИ КРУГОВЫМИ ОРБИТАМИ С ДВУХСТУПЕНЧАТЫМ РАЗГОННЫМ БЛОКОМ С ХИМИЧЕСКИМ И ЭЛЕКТРОРЕАКТИВНЫМ ДВИГАТЕЛЯМИ

2007 П. В. Фадеенков

Самарский государственный аэрокосмический университет

Рассматривается перелет между начальной низкой и целевой высокой некопланарными круговыми околоземными орбитами. Разгонные блоки, доставляющие полезную нагрузку на целевую орбиту, имеют следующие схемы: одноступенчатую и двухступенчатую с химическим ракетным двигателем, одноступенчатую с электроракетным двигателем, комбинированную двухступенчатую с химическим и электроракетным двигателями.

На основе процедур усреднения и принципа максимума для частного случая совместного расположения орбит и размещения активного участка на витке получен оптимальный закон изменения угла отклонения вектора тяги от плоскости орбиты. Использование этого закона и аналитических выражений позволяет свести сложную оптимизационную задачу о максимуме полезной нагрузки к более простой задаче поиска условного экстремума функции пяти переменных.

Проведен сравнительный анализ разгонных блоков различных схем по времени перелета и по массе полезной нагрузки. Определены преимущества комбинированного разгонного блока.

Среди целевых высоких круговых орбит спутников Земли можно выделить геостационарную орбиту и орбиты спутников системы радионавигации. С одной стороны, миниатюризация современных спутников позволяет отказаться от использования мощных ракет-носителей и обратить внимание на баллистические ракеты, которые можно отнести к ракетам среднего и малого класса, а с другой стороны, существующими ракетами-носителями можно выводить группы спутников. В обоих случаях требуется провести исследования энергетических возможностей разгонных блоков (РБ) космических аппаратов (КА), под которыми будем понимать полезную нагрузку (ПН) и РБ.

Рассмотрим РБ, состоящий из двух ступеней. Первая ступень представляет уменьшенный вариант одного из существующих РБ («Фрегат», «Бриз» и т.п.), в котором двигательная установка (ДУ) с химическим ракетным двигателем (ХРД) остается без изменений, а изменения вносятся в систему хранения топлива:

1) уменьшается размер баков и объем топлива, что требует конструктивных изменений;

2) РБ заправляется меньшим количеством топлива без конструктивных изменений.

Первая ступень выполняет перелет с начальной низкой круговой орбиты на промежуточную эллиптическую орбиту и после выполнения маневра отделяется от РБ.

Вторая ступень состоит из блока с электроракетным двигателем (ЭРД) малой тяги (МТ), системы подачи и хранения топлива и энергетической установки (ЭУ). В качестве ЭУ рассматривается ядерный источник энергии как стабильно работающий на продолжительных интервалах времени. Вторая ступень выполняет перелет с промежуточной орбиты на конечную и после выполнения своей задачи остается в составе КА, что позволяет использовать ЭУ для работы целевой аппаратуры, а двигатели - для коррекции целевой орбиты.

Наличие ЭУ делает возможным использование на первой ступени ДУ с подогревом топлива, которая характеризуется средними значениями скорости истечения рабочего тела (РТ) по сравнению с ХРД и ЭРД.

В качестве критерия оптимальности перелета между начальной и целевой некопланарными соосными круговыми орбитами выберем массу ПН при фиксированной массе КА и заданном времени перелета.

Запишем уравнение масс:

$$M_0 = M_{ПН} + \sum_{i=1}^2 (M_i^Д + M_i^Б + M_i^{РТ}) + M_{ЭУ}, \quad (1)$$

где M_0 – масса КА на начальной орбите; $M_{ПН}$ – масса ПН; M_i^D, M_i^B, M_i^{PT} – соответственно массы двигателя, баков и рабочего тела i -го РБ; $M_{ЭУ}$ – масса ЭУ.

Выразим массы, входящие в (1), через проектные и баллистические параметры с помощью удельных массовых характеристик, используя соотношения [1]:

$$\begin{aligned} M_{ПН} &= m_{ПН} \cdot M_0, \\ M_i^D &= g_i^D \cdot P_i^m, \\ M_i^B &= g_i^B \cdot M_{РТ}, \\ M_i^{PT} &= \int_{t_{0i}}^{t_{ki}} d_i q_i dt, \end{aligned} \quad (2)$$

$$M_{ЭУ} = g_{ЭУ} \cdot N_{max}.$$

Здесь $m_{ПН}$ – относительная масса ПН; P_i^m – максимальное значение тяги двигателей; $g_i^D, g_i^B, g_{ЭУ}$ – соответственно удельные массовые характеристики двигателей, баков и ЭУ; $d_i = \{0,1\}$ – функция включения маршевых двигателей; q_i – секундный расход РТ;

t_{0i}, t_{ki} – соответственно время начала и окончания работы; N_{max} – максимальная полезная мощность ЭУ; индекс i обозначает номер ступени РБ.

Массу рабочего тела можно выразить через формулу Циолковского, если функция включения слабо зависит от конструктивных характеристик:

$$M_i^{PT} = M_{0i} \cdot \left(1 - e^{-\frac{V_{xi}}{C_i}}\right), \quad (3)$$

где V_{xi}, C_i – соответственно затраты характеристической скорости на перелет и скорость истечения РТ i -й ступени РБ.

Для случая, когда первая ступень РБ заправляется меньшим количеством топлива, массу баков и двигателя можно считать постоянной:

$$M_1^D + M_1^B = const. \quad (4)$$

Сравним проигрыш по $M_{ПН}$ данного варианта с вариантом, когда размер баков уменьшается. Подставив (3) и (4) в (1), получим зависимости массы ПН от затрат характеристической скорости для ракеты-носителя «Союз» и РБ «Фрегат» (рис. 1). Из рис. 1 следует, что для перелета с низкой орбиты на геостационарную ($V_x = 4,212$ км/с) проигрыш по массе достигает 100 кг.

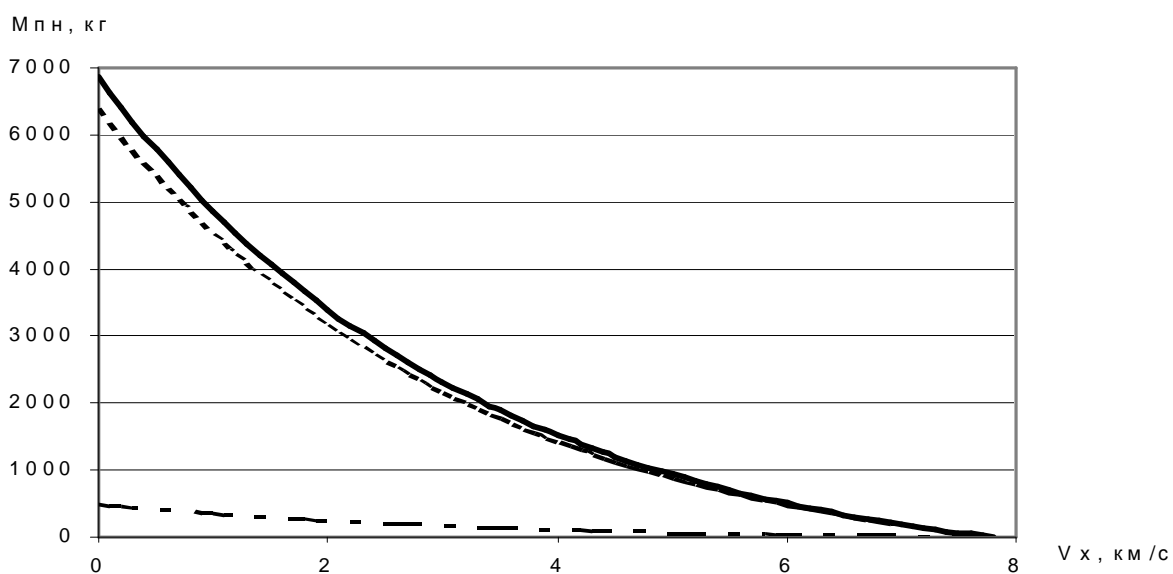


Рис. 1. Зависимость массы ПН от затрат характеристической скорости на перелет

— $M_{ПН}$ для изменяемых баков, $M_{ПН}$ для неизменяемых баков, - - - разница в $M_{ПН}$

Поэтому в дальнейшем будем рассматривать вариант с конструктивными изменениями первой ступени РБ с ХРД.

Для второй ступени с ЭРД масса ДУ может варьироваться в широких пределах без существенных конструктивных изменений. Будем считать, что максимальное значение тяги двигателей P^m , скорость истечения РТ и максимальная полезная мощность N_{max} постоянны. Используя формулу (3) и соотношения, приведенные в [1], можно выразить тягу и мощность через скорость истечения РТ, моторное время и затраты характеристической скорости.

Таким образом, разделив левую и правую части (1) на M_0 , получим выражение для относительной массы ПН, универсальное для стартовой массы КА на начальной орбите:

$$m_{ПН} = \left\{ 1 - g_{ХРД}^Д - \left(1 - e \frac{V_{ХРД}^x}{C_{ХРД}} \right) \cdot \left(1 + g_{ХРД}^Б \right) \right\} \times \left\{ 1 - \left(1 - e \frac{V_{ЭРД}^x}{C_{ЭРД}} \right) \cdot \left(1 + g_{ЭРД}^Б + \frac{C_{ЭРД}}{T_m} \cdot [g_{ЭРД}^Д + C_{ЭРД} \cdot g_{ЭУ}] \right) \right\}. \quad (5)$$

Здесь $m_{ПН}$ - масса ПН, отнесенная к массе КА на начальной орбите; $g^Д, g^Б, V^x, C$ - соответственно удельные массы двигателя и баков, затраты характеристической скорости, скорость истечения РТ; нижний индекс обозначает тип двигателя - ХРД и ЭРД, соответственно; $g_{ЭУ}$ - удельная масса ЭУ; T_m - моторное время работы двигателей ЭРД.

Удельные массовые характеристики и $C_{ХРД}$ заданы. $V_{ХРД}^x$ для перелета с начальной низкой круговой орбиты на промежуточную высокую эллиптическую орбиту с изменением наклона определим по формулам импульсной теории [2]. $V_{ЭРД}^x$ для перелета с промежуточной орбиты на конечную высокую круговую орбиту рассчитаем по выражениям, приведенным в [3, 4, 5].

Получим расчетные формулы для случая многовиткового перелета с активным участком на витке, симметрично расположенным

относительно одной из апсидальных точек, при ориентации вектора тяги по трансверсали. Особенность исследуемой задачи состоит в продолжительном активном участке при управлении, приводящем к совместному изменению большой полуоси, эксцентриситета и наклона.

Примем, что возмущения от несферичности Земли, атмосферы и других факторов отсутствуют. Тогда система уравнений движения имеет вид [2]:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= 2 \sqrt{\frac{A^3}{m(1-e^2)}} [a_x(1+e \cos J) + a_y e \sin J], \\ \frac{de}{dt} &= \sqrt{\frac{A(1-e^2)}{m}} \left\{ a_y \sin J + a_x \left[\left(1 + \frac{1}{1+e \cos J} \right) \cos J + \frac{e}{1+e \cos J} \right] \right\}, \\ \frac{di}{dt} &= \sqrt{\frac{A(1-e^2)}{m}} \frac{a_z \cdot \cos u}{1+e \cos J}, \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \sqrt{\frac{A(1-e^2)}{m}} \frac{a_z \cdot \sin u}{(1+e \cos J) \cdot \sin i}, \\ \frac{dw}{dt} &= \sqrt{\frac{A(1-e^2)}{m}} \left[-a_y \frac{\cos J}{e} + \frac{a_x}{e} \left(1 + \frac{1}{1+e \cos J} \right) \sin J - a_z \cdot e \cdot \frac{\sin u \cdot \operatorname{ctg} i}{1+e \cos J} \right], \\ \frac{dJ}{dt} &= \sqrt{\frac{A(1-e^2)}{m}} \left[\frac{m(1+e \cos J)^2}{A^2(1-e^2)^2} + a_y \frac{\cos J}{e} - \frac{a_x}{e} \left(1 + \frac{1}{1+e \cos J} \right) \sin J \right], \\ \frac{dV_x}{dt} &= a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = a_0 \exp\left(\frac{V_x}{C}\right) \end{aligned} \quad (6)$$

где A, e, i, W, w, u, u - элементы орбиты; V_x - характеристическая скорость; a_0 - начальное ускорение; C - скорость истечения рабочего тела; m - гравитационная постоянная; a_x, a_y, a_z - составляющие реактивного ускорения в связанной системе координат.

Для заданного управления и принятых допущениях получим:

$$\begin{aligned} a_x &= a \cos q, \\ a_y &= a \sin q, \\ a_z &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь q - угол отклонения вектора тяги ДУ от плоскости орбиты; d - функция включения двигателей:

- центр активного участка в перигее

$$d = \begin{cases} 1, & -a \leq u \leq a, \\ 0, & a \leq u \leq 2p - a, \end{cases} \quad (8)$$

- центр активного участка в апогее

$$d = \begin{cases} 1, p - a \leq u \leq p + a, \\ 0, a - p \leq u \leq p - a, \end{cases} \quad (9)$$

где a - половина ширины разгонного участка.

Согласно (7) в моменты $u = p/2$ направление тяги меняется на симметричное относительно плоскости орбиты.

Примем, что оси аписид промежуточной и конечной орбит совпадают с линиями узлов и лежат в плоскости экватора:

$$w_0 = 0, \quad (10)$$

где w_0 - аргумент перигея в начальный момент времени.

Перейдем к новой независимой переменной – эксцентрической аномалии E , приняв, что использование МТ не приводит к существенному уходу оси аписид:

$$\frac{dE}{dt} = \sqrt{\frac{m}{A^3}} (1 - e \cdot \cos E)^{-1}. \quad (11)$$

Общая формула процедуры усреднения имеет вид

$$\frac{d\tilde{x}}{dE} = \frac{1}{2p} \int_0^{2p} \frac{dx}{dE} dE, \quad (12)$$

где x - фазовая переменная, \tilde{x} - усредненная фазовая переменная.

Подставим в (12) угол a , который будем отсчитывать по эксцентрической аномалии и считать постоянным. Тогда формула процедуры усреднения в зависимости от положения центра активного участка преобразуется:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}}{dE} &= \frac{1}{2p} \int_{-a}^a \frac{dx}{dE} dE - \text{для перигея,} \\ \frac{d\tilde{x}}{dE} &= \frac{1}{2p} \int_{p-a}^{p+a} \frac{dx}{dE} dE - \text{для апогея.} \end{aligned} \quad (13)$$

Момент изменения тяги на симметричное направление относительно плоскости орбиты определяется соотношением

$$E_{nep} = \arccos(e) = \arcsin \sqrt{1 - e^2}. \quad (14)$$

Проведем процедуру усреднения и получим

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dE} &= \frac{2}{2p} a \cdot \cos q \frac{A^3}{m} \sqrt{1 - e^2} \cdot 2a, \\ \frac{de}{dE} &= \frac{1}{2p} a \cdot \cos q \frac{A^2}{m} \sqrt{1 - e^2} \left(\pm 4 \sin a - 3ea - \frac{e \cdot \sin 2a}{2} \right), \\ \frac{di}{dE} &= \frac{1}{2p} a \cdot \sin q \frac{A^2}{m \sqrt{1 - e^2}} f_1(e, a), \\ \frac{d\Omega}{dE} &= 0, \\ \frac{dw}{dE} &= 0, \\ \frac{dV_x}{dE} &= \frac{1}{2p} a \cdot \sqrt{\frac{A^3}{m}} (2a + 2e \sin a), \end{aligned} \quad (15)$$

где “+” перигей, “-” апогей.

Для уравнения, описывающего изменение наклона i в (15), имеются следующие соотношения:

- импульсы прикладываются в перигее:

$$f_1(e, a) = \begin{cases} a < E_{nep}, & \frac{1}{2p} a_0 \cdot \exp\left(-\frac{V_x}{C}\right) \cdot \sin q \times \\ & \frac{A^2}{m \sqrt{1 - e^2}} \left(2 \sin a (1 + e^2) - e \cdot \left(3a + \frac{\sin 2a}{2} \right) \right) \\ a > E_{nep}, & \frac{1}{2p} a_0 \cdot \exp\left(-\frac{V_x}{C}\right) \cdot \sin q \times \\ & \frac{A^2}{m \sqrt{1 - e^2}} \left(2 \sin a (1 + e^2) - e \cdot \left(3a + \frac{\sin 2a}{2} \right) - \right. \\ & \left. 2 \cdot \sqrt{1 - e^2} \cdot (2 + e^2) + 6 \cdot e \cdot \arccos(e) \right) \end{cases} \quad (16)$$

- импульсы прикладываются в апогее:

$$f_1(e, a) = \begin{cases} a < p - E_{nep}, & \frac{1}{2p} a_0 \cdot \exp\left(-\frac{V_x}{C}\right) \cdot \sin q \times \\ & \frac{A^2}{m \sqrt{1 - e^2}} \cdot \left(-2 \sin a (1 + e^2) - e \cdot \left(3a + \frac{\sin 2a}{2} \right) \right) \\ a > p - E_{nep}, & \frac{1}{2p} a_0 \cdot \exp\left(-\frac{V_x}{C}\right) \cdot \sin q \times \\ & \frac{A^2}{m \sqrt{1 - e^2}} \cdot \left(-2 \sin a (1 + e^2) - e \cdot \left(3a + \frac{\sin 2a}{2} \right) + \right. \\ & \left. 2 \cdot \sqrt{1 - e^2} \cdot (2 + e^2) - 6 \cdot e \cdot \arccos(e) + \right. \\ & \left. + 6 \cdot e \cdot p \right) \end{cases} \quad (17)$$

Первые два уравнения в (15) могут быть проинтегрированы:

$$A \cdot (\sin a \pm e \cdot k_1)^{\frac{a}{k_1}} = const, \quad (18)$$

$$k_1 = \frac{3}{4}a + \frac{\sin 2a}{8},$$

где “+” апогей, “-” перигей.

Для импульсных перелетов формула (18) преобразуется к полученной ранее в [6]:

$$A \cdot (1 \pm e) = const, \quad (19)$$

что означает постоянство радиуса орбиты в апсидальной точке, которая соответствует центру активного участка.

Определим оптимальную программу изменения угла $|q|$.

Система (15) может быть сокращена на три уравнения, поскольку эксцентрическая аномалия, отсутствуя в уравнениях и не влияя на управление, может быть исключена. Перейдем к новой независимой переменной V_x :

$$\frac{dA}{dV_x} = 2 \cdot \cos q \cdot \sqrt{\frac{A^3}{m}} \cdot \sqrt{1-e^2} \cdot \frac{a}{a+e \cdot \sin a}, \quad (20)$$

$$\frac{di}{dV_x} = \sin q \cdot \sqrt{\frac{A}{m \cdot (1-e^2)}} \cdot f_1(e, a).$$

В соответствии с принципом максимума Понтрягина составим гамильтониан системы

$$H = \frac{dA}{dV_x} \Psi_A + \frac{di}{dV_x} \Psi_i - \Psi_{V_x}, \quad (21)$$

где $\Psi_e, \Psi_i, \Psi_{V_x}$ - сопряженные множители.

Уравнения для сопряженных множителей имеют вид

$$\dot{\Psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial i} = 0,$$

$$\dot{\Psi}_{V_x} = -\frac{\partial H}{\partial V_x} = 0, \quad (22)$$

$$\dot{\Psi}_A = -\frac{\partial H}{\partial A}.$$

Из (22) следует, что два сопряженных множителя постоянны на всей оптимальной траектории, а уравнение для третьего множителя представляется сложной зависимостью.

Управление определится в явном виде

из условия $\frac{\partial H}{\partial q} = 0$:

$$\operatorname{ctg} q = \frac{2 \cdot A \cdot (1-e^2) \cdot a \cdot \Psi_A}{(a+e \cdot \sin a) \cdot f_1(e, a) \cdot \Psi_i}. \quad (23)$$

Подставив (20) и (23) в (21), учитывая, что из (22) следует $\Psi_i = const$, получим выражение относительно синуса угла:

$$\frac{1}{\sin q} \cdot \sqrt{\frac{A}{m \cdot (1-e^2)}} \cdot f_1(e, a) = const. \quad (24)$$

Как следует из (24), управление зависит только от фазовых переменных e и A , и поэтому после подстановки (24) в (15) исходная система может быть проинтегрирована.

Перелет по предлагаемой схеме по сравнению с перелетом при раздельном изменении параметров орбиты осуществляется с меньшими затратами рабочего тела [7].

Таким образом, задавая параметры промежуточной орбиты, на которой происходит отделение первой ступени РБ и начинается работа второй ступени, можно рассчитать затраты характеристической скорости для каждой из ступеней РБ.

Если ширина активного участка остается постоянной во время выполнения маневра, то моторное время T_m связано с временем

перелета T соотношением $T_m = \frac{a}{p} \cdot T$. Для

случая непрерывной работы двигателей второй ступени РБ времена T_m и T совпадают. Будем считать, что время перелета с начальной орбиты на промежуточную существенно меньше, чем время на многовитковый перелет с промежуточной орбиты на конечную.

Таким образом, выражение (5) зависит от параметров промежуточной орбиты A , e , i , ширины активного участка a и времени на перелет T , и исходная задача поиска максимальной массы полезного груза сводится к

задаче поиска максимума (5) в общем случае по пяти переменным. Такая задача может быть решена только численно.

Проведено моделирование перелета с низкой круговой орбиты высотой 200 км на геостационарную орбиту высотой 36000 км с разницей наклона $51,7^\circ$, с заданным временем перелета в интервале от 40 до 160 суток с шагом в одни сутки. Зависимости относительной массы ПН для различных РБ приведены на рис. 2:

1) перелет с одноступенчатым РБ с ХРД (традиционная схема);

2) перелет с двухступенчатым РБ с ХРД на каждой ступени;

3) перелет с одноступенчатым РБ с ЭРД;

4) перелет с двухступенчатым комбинированным РБ с ХРД и ЭРД.

Анализ результатов, приведенных на рис. 2, позволяет сделать следующие выводы:

1) комбинированный РБ предпочти-

тельнее использовать при времени перелета от 46 суток по сравнению с РБ традиционной схемы (точка пересечения графиков 1 и 4) или от 62 суток по сравнению с возможной двухступенчатой схемой РБ с ХРД (точка пересечения графиков 2 и 4) и до 146 суток по сравнению с одноступенчатым РБ с ЭРД (точка пересечения графиков 3 и 4);

2) одноступенчатый РБ с ЭРД предпочтительнее использовать при времени перелета, превышающим 128 суток по сравнению с одноступенчатым РБ с ХРД (точка пересечения графиков 1 и 3) и 135 суток по сравнению с двухступенчатым РБ с ХРД (точка пересечения графиков 2 и 3);

3) максимальный выигрыш в массе ПН при использовании комбинированного РБ с ХРД и ЭРД составляет 29 % по сравнению с одноступенчатым РБ с ХРД, 13 % по сравнению с двухступенчатым РБ с ХРД и более чем в два раза по сравнению с одноступенчатым РБ с ЭРД.

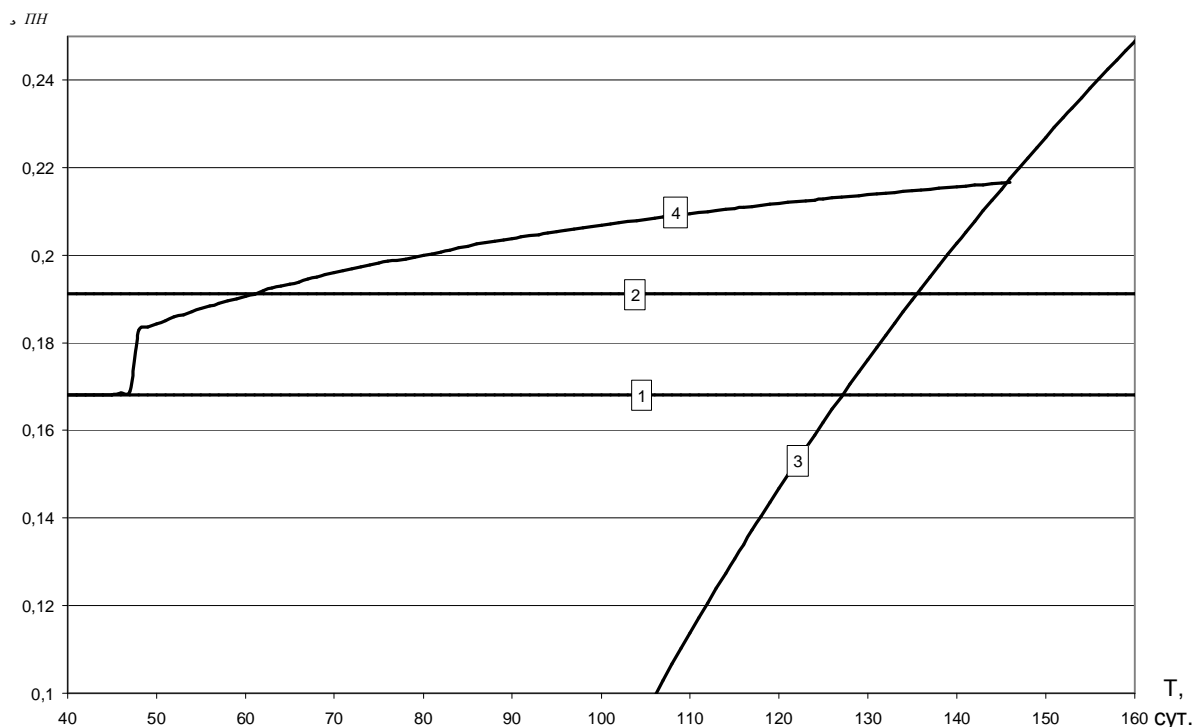


Рис. 2. Графики зависимостей относительной массы полезного груза от времени перелета для различных РБ

Список литературы

1. Гродзовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В. Механика космического полета. Проблемы оптимизации. - М.: Наука, 1975.

2. Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю. Г. Основы механики космического полета. - М.: Наука, 1990.

3. Лебедев В. Н. Расчет движения космического аппарата с малой тягой // Математические методы в динамике космических аппаратов. - М. – 1968. - Вып.5.

4. Ишков С. А., Романенко В. А. Формирование и коррекция высокоэллиптической орбиты спутника Земли с двигателем малой тяги // Космические исследования. - 1997. Т. XXXVI. - Вып.2. – С. 11-20.

5. Ишков С. А. Расчет оптимальных межорбитальных перелетов с малой тягой между круговой и эллиптической орбитами // Космические исследования. - 1997. Т. XXXVI. - Вып.2. – С. 1-10.

6. Фадеенков П. В., Ишков С. А. Баллистическое обоснование применения двигате-

лей ограниченной тяги для формирования энергоемких орбит // Сб. тр. IX Всерос. научно-техн. семинара по управлению движением и навигации летательных аппаратов: Ч. 1/Самарский филиал Российской Академии космонавтики. - Самара, 1999. – С. 144-148.

7. Фадеенков П. В. Оптимизация перелетов между некомпланарными эллиптическими орбитами с двигателями малой тяги // Сб. тр. XIII Всерос. научно-техн. семинара по управлению движением и навигации летательных аппаратов: Ч. 1/ Самарский филиал Российской академии космонавтики. - Самара, 2007. – С. 193-197.