

ИЗМЕРЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ПОГЛОЩЕНИЯ УЛЬТРАЗВУКА В ЖИДКОСТИ В УСЛОВИЯХ НЕЛИНЕЙНОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛН

2007 В. С. Кононенко¹, А. В. Шацкий²

¹Самарский государственный технический университет

²Самарский государственный аэрокосмический университет

Представлены результаты расчета спада амплитуды свободных нелинейных колебаний в ультразвуковом резонаторе, заполненном жидкостной диссипативной средой. По результатам расчета проведен анализ зависимости коэффициента поглощения ультразвука от времени спада колебаний, на основе которого предложена методика, позволяющая экспериментаторам избежать больших ошибок при измерении коэффициента поглощения ультразвука в условиях нелинейного распространения волн.

1. Проблема исследования поглощения

Из множества методов для исследования поглощения ультразвуковых волн в жидкости самыми распространенными являются резонаторный и импульсный методы. На частотах ниже 10 МГц используется резонаторный метод исследования, в котором ультразвуковой луч проходит достаточно большое расстояние посредством переотражений от пьезопреобразователей резонатора. Поглощение измеряется по половинной ширине резонансного пика снимаемого сигнала с помощью пьезопреобразователя или измеряется время спада амплитуды колебаний волн. Проблема состоит в том, что при измерении поглощения даже на достаточно небольших амплитудах на частотах, близких $f_q/2$, $f_q/3, \dots$, где f_q - собственная частота приемного пьезопреобразователя, в спектре приемного сигнала появляются высшие гармоники [1]. Это связано с тем, что уравнение движения в жидкости нелинейно. Данное обстоятельство может привести к значительному искажению получаемых результатов в ходе эксперимента. Таким образом, экспериментаторам приходится пропускать данные диапазоны частот при построении спектральной характеристики коэффициента поглощения в жидкости [2]. В статье проводится исследование данной проблемы, а также анализируются возможные методы ее устранения.

2. Постановка и решение задачи

Ультразвуковой жидкостный резонатор состоит, как правило, из цилиндрической полости, в торцах которой прикреплены пьезопреобразователи, один из которых является излучающим, а другой приемным. Ультразвуковой луч многократно отражается от пьезопреобразователей, что приводит к образованию стоячей ультразвуковой волны. Рассмотрим одномерный ультразвуковой резонатор с абсолютно жесткими стенками, между которыми распространяются ультразвуковые волны. Для нахождения амплитуд ультразвуковых волн воспользуемся волновым уравнением, записанным в переменных Лагранжа [3]:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{c_0^2}{(1 + \partial \xi / \partial a)^{\gamma+1}} \frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2} \quad (1)$$

Данное уравнение описывает волны, бегущие в обе стороны – как вправо, так и влево, - и их взаимодействие между собой. Здесь ξ и a - смещение и координата в переменных Лагранжа, соответственно; c_0 - скорость звука в жидкости, γ - показатель адиабаты жидкости. В рассматриваемом случае жидкость является вязкой, и уравнение (1) приобретает достаточно сложный вид. Однако на основе качественных соображений его часто дополняют диссипативным членом, содержащим производную третьего порядка [3]:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{c_0^2}{(1 + \partial \xi / \partial a)^{\gamma+1}} \frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2} + \frac{b}{\rho_0} \frac{\partial^3 \xi}{\partial^2 a \cdot \partial t}, \quad (2)$$

где b - параметр диссипации, ρ_0 - плотность жидкости. При малых ξ можно воспользоваться уравнением, полученным из (2) разложением члена $(1 + \partial \xi / \partial a)^{-(\gamma+1)}$ в степенной ряд, оставляя первые два члена разложения. В итоге получим уравнение

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 2\varepsilon \frac{\partial \xi}{\partial a} \frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2} - \frac{b}{c_0^2 \rho_0} \frac{\partial^3 \xi}{\partial a^2 \cdot \partial t}, \quad (3)$$

где $\varepsilon = (\gamma+1)/2$ - параметр нелинейности среды. В качестве начального условия выберем стоячую волну обычного синусоидального типа. Также предположим, что в резонаторе могут взаимодействовать только пять основных мод, и будем искать решение уравнения (3) в следующем виде:

$$x = A_1(t) \sin(ka) + A_2(t) \sin(2ka) + A_3(t) \sin(3ka) + A_4(t) \sin(4ka) + A_5(t) \sin(5ka). \quad (4)$$

Собирая выражения, стоящие при $\sin(ka)$, $\sin(2ka)$, $\sin(3ka)$, $\sin(4ka)$ и $\sin(5ka)$, придем к следующим уравнениям:

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{d^2 A_1}{dt} + \frac{b}{c_0^2 \rho_0} k^2 \frac{dA_1}{dt} + k^2 A_1 = 2\varepsilon k^3 [A_1 A_2 + 3A_2 A_3 + 6A_3 A_4 + 10A_4 A_5], \quad (5)$$

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{d^2 A_2}{dt} + \frac{b}{c_0^2 \rho_0} 4k^2 \frac{dA_2}{dt} + 4k^2 A_2 = 2\varepsilon k^3 \left[\frac{1}{2} A_1^2 + 3A_1 A_3 + 8A_2 A_4 + 15A_3 A_5 \right], \quad (6)$$

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{d^2 A_3}{dt} + \frac{b}{c_0^2 \rho_0} 9k^2 \frac{dA_3}{dt} + 9k^2 A_3 = 2\varepsilon k^3 [3A_1 A_2 + 6A_4 A_1 + 15A_2 A_5], \quad (7)$$

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{d^2 A_4}{dt} + \frac{b}{c_0^2 \rho_0} 16k^2 \frac{dA_4}{dt} + 16k^2 A_4 = 2\varepsilon k^3 [6A_1 A_3 + 10A_1 A_5 + 4A_2^2], \quad (8)$$

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{d^2 A_5}{dt} + \frac{b}{c_0^2 \rho_0} 25k^2 \frac{dA_5}{dt} + 25k^2 A_5 = 2\varepsilon k^3 [10A_1 A_4 + 15A_2 A_3]. \quad (9)$$

Если считать далее, что нелинейные и диссипативные члены в уравнениях (5) – (9) малы ($\sim \mu$), то решение можно приближенно искать в форме:

$$\begin{aligned} A_1(t) &= B_1(\mu t) \exp(i\omega t) + \text{к.с.}, \\ A_2(t) &= B_2(\mu t) \exp(i2\omega t) + \text{к.с.}, \\ A_3(t) &= B_3(\mu t) \exp(i3\omega t) + \text{к.с.}, \\ A_4(t) &= B_4(\mu t) \exp(i4\omega t) + \text{к.с.}, \\ A_5(t) &= B_5(\mu t) \exp(i5\omega t) + \text{к.с.} \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь B_1, B_2, B_3, B_4 и B_5 - медленно меняющиеся комплексные амплитуды распространяющихся гармоник. Сохраняя везде члены не выше первого порядка малости, получим

$$\frac{dB_1}{dt} + \frac{b}{2\rho_0} k^2 B_1 = -i\varepsilon \omega k [B_1^* B_2 + 3B_2^* B_3 + 6B_3^* B_4 + 10B_4^* B_5], \quad (11)$$

$$\frac{dB_2}{dt} + \frac{b}{2\rho_0} 4k^2 B_2 = -i \frac{1}{2} \varepsilon \omega k \left[\frac{1}{2} B_1^2 + 3B_1^* B_3 + 8B_2^* B_4 + 15B_3^* B_5 \right], \quad (12)$$

$$\frac{dB_3}{dt} + \frac{b}{2\rho_0} 9k^2 B_3 = -i \frac{1}{3} \varepsilon \omega k [6B_1^* B_4 + 3B_1 B_2 + 15B_2^* B_5], \quad (13)$$

$$\frac{dB_4}{dt} + \frac{b}{2\rho_0} 16k^2 B_4 = -i \frac{1}{4} \varepsilon \omega k [6B_1 B_3 + 10B_1^* B_5 + 4B_2^2], \quad (14)$$

$$\frac{dB_5}{dt} + \frac{b}{2\rho_0} 25k^2 B_5 = -i \frac{1}{5} \epsilon \omega k [10B_4 B_1 + 15B_2 B_3] \quad (15)$$

В уравнениях системы (11) – (15) удобно перейти к действительным амплитудам и фазам. Полагая для этого:

$$B_1 = C_1 \exp(iS_1), \quad B_2 = C_2 \exp(iS_2), \\ B_3 = C_3 \exp(iS_3), \quad B_4 = C_4 \exp(iS_4), \\ B_5 = C_5 \exp(iS_5)$$

и выделяя из каждого вещественную и мнимую части, получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dC_1}{dt} + \frac{b}{2\rho_0} k^2 C_1 = \omega k \epsilon [C_1 C_2 \sin(S_2 - 2S_1) + 3C_2 C_3 \sin(S_3 - S_2 - S_1) + 6C_3 C_4 \sin(S_4 - S_3 - S_1) + 10C_4 C_5 \sin(S_5 - S_4 - S_1)] \quad (16)$$

$$\frac{dC_2}{dt} + \frac{b}{2\rho_0} 4k^2 C_2 = \frac{1}{2} \omega k \epsilon \left[\frac{1}{2} C_1^2 \sin(2S_1 - S_2) + 3C_1 C_3 \sin(S_3 - S_1 - S_2) + 8C_2 C_4 \sin(S_4 - 2S_2) + 15C_3 C_5 \sin(S_5 - S_3 - S_2) \right] \quad (17)$$

$$\frac{dC_3}{dt} + \frac{b}{2\rho_0} 9k^2 C_3 = \frac{1}{3} \omega k \epsilon [6C_1 C_4 \sin(S_4 - S_1 - S_3) + 3C_1 C_2 \sin(S_1 + S_2 - S_3) + 15C_2 C_5 \sin(S_5 - S_2 - S_3)] \quad (18)$$

$$\frac{dC_4}{dt} + \frac{b}{2\rho_0} 16k^2 C_4 = \frac{1}{4} \omega k \epsilon [6C_1 C_3 \sin(S_1 + S_3 - S_4) + 10C_1 C_5 \sin(S_5 - S_1 - S_4) + 4C_2^2 \sin(2S_2 - S_4)] \quad (19)$$

$$\frac{dC_5}{dt} + \frac{b}{2\rho_0} 25k^2 C_5 = \frac{1}{5} \omega k \epsilon [10C_4 C_1 \sin(S_4 + S_1 - S_5) + 15C_2 C_3 \sin(S_2 + S_3 - S_5)] \quad (20)$$

$$\frac{dS_1}{dt} = -\omega k \epsilon [C_1 C_2 \cos(S_2 - 2S_1) + 3C_2 C_3 \cos(S_3 - S_2 - S_1) + 6C_3 C_4 \cos(S_4 - S_3 - S_1) + 10C_4 C_5 \cos(S_5 - S_4 - S_1)] \quad (21)$$

$$\frac{dS_2}{dt} = -\frac{1}{2} \omega k \epsilon \left[\frac{1}{2} C_1^2 \cos(2S_1 - S_2) + 3C_1 C_3 \cos(S_3 - S_1 - S_2) + 8C_2 C_4 \cos(S_4 - 2S_2) + 15C_3 C_5 \cos(S_5 - S_3 - S_2) \right] \quad (22)$$

$$\frac{dS_3}{dt} = -\frac{1}{3} \omega k \epsilon [6C_1 C_4 \cos(S_4 - S_1 - S_3) + 3C_1 C_2 \cos(S_1 + S_2 - S_3) + 15C_2 C_5 \cos(S_5 - S_2 - S_3)] \quad (23)$$

$$\frac{dS_4}{dt} = -\frac{1}{4} \omega k \epsilon [6C_1 C_3 \cos(S_3 + S_1 - S_4) + 10C_1 C_5 \cos(S_5 - S_1 - S_4) + 4C_2^2 \cos(2S_2 - S_4)] \quad (24)$$

$$\frac{dS_5}{dt} = -\frac{1}{5} \omega k \epsilon [10C_4 C_1 \cos(S_4 + S_1 - S_5) + 15C_2 C_3 \cos(S_2 + S_3 - S_5)] \quad (25)$$

Поскольку получить аналитическое решение системы (16) – (25) невозможно, система решалась численно методом Рунге-Кутты. На рис. 1 приведены результаты расчета относительных комплексных амплитуд первых пяти гармоник в зависимости от величины $x = t \cdot \omega$: ω – циклическая частота возбуждаемого сигнала, B_0 – суммарная амплитуда колебаний распространяющихся гармоник в начальный момент времени.

3. Анализ полученных результатов

Результаты расчета указывают на достаточно сложную зависимость спада амплитуд гармоник с течением времени. Это объясняется тем, что помимо диссипативных эффектов присутствуют также и нелинейные эффекты, и в резонаторе происходит обмен энергиями между всеми возникающими гармониками. Если не сделать ограничения на число образующихся гармоник, то зависимости будут иметь еще более сложный характер.

Решение данной задачи имеет практическую ценность. Суть в том, что при исследовании поглощения с помощью резонаторов экспериментаторы либо пропускают те диапазоны частот, в которых наблюдаются не-

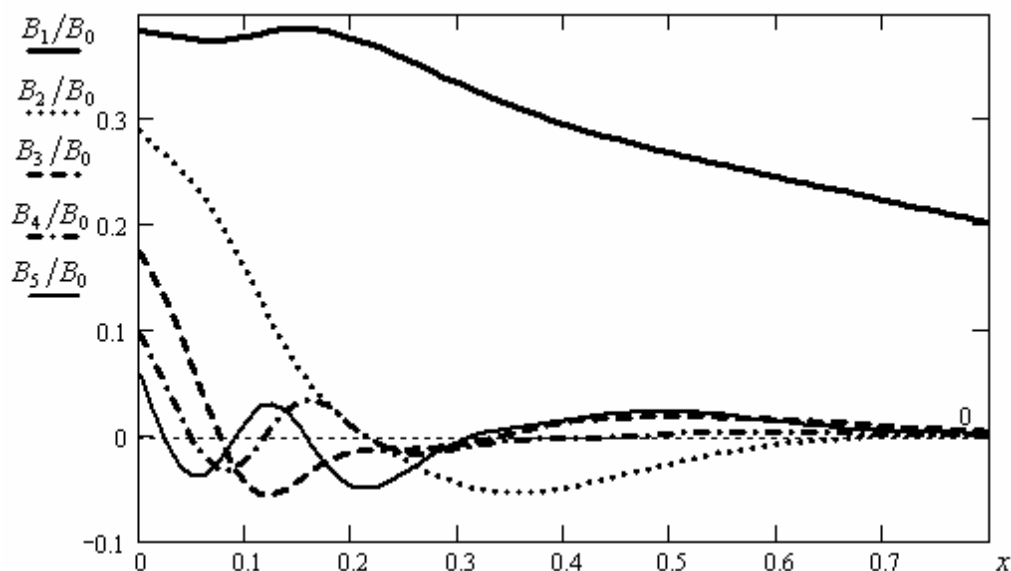


Рис. 1 Зависимости спада амплитуд свободных колебаний первых пяти гармоник в акустическом резонаторе, заполненном жидкой диссипативной средой

линейные эффекты, либо пользуются допущением, что распространяющиеся моды не взаимодействуют друг с другом, то есть между ними не происходит обмена энергиями. Такое часто происходит, когда поглощение измеряется с помощью времени спада колебаний. При этом измеряется время, за которое амплитуда колебаний спадет в e раз, а затем рассчитывается коэффициент поглощения по достаточно простым формулам. Если взаимодействием гармоник пренебречь (правые части уравнений системы (11) – (16) будут равны нулю), то решение системы примет вид:

$$B_T(\alpha, t) = B_{1,0}e^{-\alpha t} + B_{2,0}e^{-4\alpha t} + B_{3,0}e^{-9\alpha t} + B_{4,0}e^{-16\alpha t} + B_{5,0}e^{-25\alpha t}, \quad (26)$$

где $\alpha = bk^2/2\rho_0$ - коэффициент поглощения жидкости; $B_{1,0}$, $B_{2,0}$, $B_{3,0}$, $B_{4,0}$ и $B_{5,0}$ - начальные амплитуды первой, второй, третьей, четвертой и пятой гармоники, соответственно.

На рис. 2 приведены кривая спада колебаний реально наблюдаемого сигнала (с учетом взаимодействия гармоник) и кривая, описываемая решением (26), построенные при одинаковых начальных условиях и одинаковых параметрах исследуемой среды. На рисунке указаны точки, в которых снимается отсчет времени спада колебаний τ , за кото-

рое амплитуда уменьшается в e раз – это пересечение прямой $W = 1/e$ и кривых. Полученные точки: τ - реальное время спада, τ_T - время спада согласно (26) отличаются друг от друга.

Чем больше будет параметр нелинейности исследуемой среды, тем более значительно будут различаться τ и τ_T . Это означает, что использование времени спада колебаний τ , реально снимаемого прибором, при подстановке в (26) ведет к большому завышению рассчитываемого коэффициента поглощения α . Поправку к таким результатам сделать достаточно сложно. Единственным возможным способом приблизиться к истинному значению коэффициента поглощения при использовании выражения (26) является следующее. Отсчет времени спада колебаний нужно снимать не в момент, когда амплитуда колебаний уменьшится в e раз, как это принято, а когда влияние высших гармоник станет пренебрежимо малым, то есть их амплитуда вследствие диссипации станет достаточно малой по сравнению с основной модой. На рис. 2 видно, что кривая, снимаемая прибором, с течением времени ведет себя как кривая, построенная с допущением о не взаимодействии гармоник между собой. Это означает, что если приборы позволяют зафиксировать момент времени, когда на кривой спада амплитуды

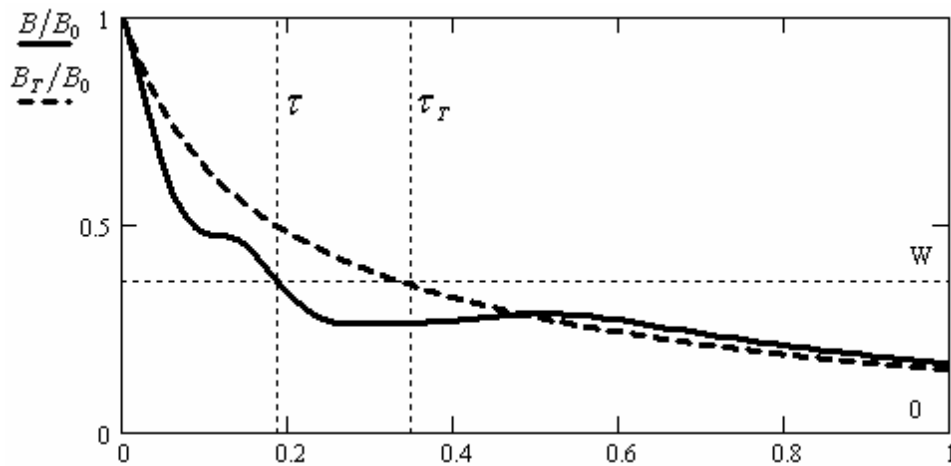


Рис. 2 Спад суммарной амплитуды колебаний с течением времени: сплошная линия – с учетом взаимодействия гармоник; пунктирная – без учета взаимодействия гармоник

литуды колебаний будут отсутствовать осцилляции, обусловленные взаимодействием гармоник, то можно провести одновременно отсчет амплитуды и времени спада колебаний и затем достаточно просто рассчитать коэффициент поглощения. Уравнение для расчета будет выглядеть следующим образом:

$$B_T(\alpha, \tau) = \frac{B_T(\alpha, 0)}{N}, \quad (27)$$

где N - число, показывающее, во сколько раз уменьшилась амплитуда колебаний за время τ . Начальные значения амплитуд гармоник можно снять с анализатора спектра, использование которого обязательно при исследовании поглощения с помощью резонатора. Численным решением уравнения (27) определяется коэффициент поглощения, отличие которого от истинного значения станет существенно меньше.

Заключение

Использование данной методики исследования поглощения ультразвука в жидкости

при условии нелинейного распространения волн показывает необходимость дальнейшего теоретического исследования, которое позволит получить новые технические решения при создании прецизионных экспериментальных установок.

Список литературы

1. Кононенко В. С., Прокопьев В. И., Галанин В. В. Исследование нелинейных эффектов в одномерном ультразвуковом резонаторе с плоскими пьезопластинами // Исследование ресурсосберегающих технологий на железнодорожном транспорте: Межвузовский сборник научных трудов с международным участием / Под ред. д.т.н. В. Н. Яковлева. Вып. 23. – Самара: СамИИТ, 2002. - С. 455-458.
2. Eggers F., Kaatz U. Broad-band ultrasonic measurement techniques for liquids / / Meas. Sci. Technol. 1996 – V. 7. – P. 1-19.
3. Руденко О. В., Солюян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. – Москва, 1975.- С. 127-138.