

РАСЧЕТ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ НАГРУЖЕНИИ ПО МЕТОДУ КВАДРАТУР

2007 И. С. Ахмедьянов

Самарский государственный аэрокосмический университет

Рассматривается применение численного метода квадратур к интегрированию дифференциальных уравнений изгиба оболочек вращения переменной толщины при осесимметричном нагружении. Исходная система дифференциальных уравнений преобразуется в интегральную. Ко всем появляющимся интегралам с переменными верхними пределами применяется квадратурная формула трапеций, что позволяет составить систему линейных алгебраических уравнений для определения значений всех искомых функций с заданным шагом t . В результате удается получить численные значения частных решений системы дифференциальных уравнений, и построить ее общее решение, содержащее произвольные постоянные.

Основные обозначения

OX, OY, OZ – оси прямоугольной системы координат;

q, j – угловые (географические) координаты точки срединной поверхности оболочки вращения;

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ – единичные векторы касательной к меридиану, касательной к параллели и нормали к срединной поверхности оболочки;

R_1, R_2 – главные радиусы кривизны срединной поверхности оболочки;

r – радиус параллели срединной поверхности оболочки вращения;

u, w – проекции полного перемещения точки срединной поверхности оболочки на направления ортов \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_3 ;

u_r, u_x – радиальное и осевое перемещение точки срединной поверхности оболочки вращения;

J_1 – угол поворота нормали к срединной поверхности оболочки вокруг орта \mathbf{e}_2 ;

d – толщина оболочки;

N_1, N_2, Q_1 – погонные нормальные и перерезывающее усилия в сечениях оболочки;

Q_r, Q_x – погонные радиальное и осевое усилия в сечениях оболочки;

M_1, M_2 – погонные изгибающие моменты в сечениях оболочки;

E, m – модуль упругости и коэффициент

Пуассона материала оболочки;

$D = Ed^3/12(1 - m^2)$ – жесткость сечения оболочки на изгиб.

Принятая система координат и положительные направления сил, моментов и перемещений показаны на рис. 1-3.

1. Основные соотношения моментной теории изгиба оболочек вращения переменной толщины при осесимметричном нагружении

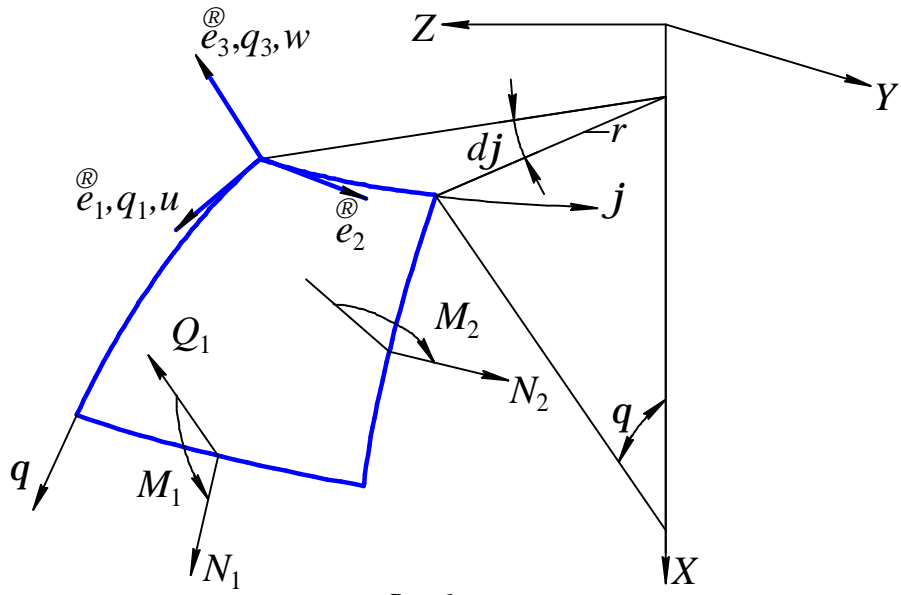
1.1. В [1] для исследования напряженно-деформированного состояния оболочки вращения переменной толщины получена следующая система дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 + f_{1q}, \\ y_2' &= a_{22}y_2 + a_{24}y_4 + f_{2q}, \\ y_3' &= a_{31}y_1 + a_{33}y_3 + f_{3q}, \\ y_4' &= a_{42}y_2 + a_{43}y_3 + a_{44}y_4 + f_{4q}. \end{aligned} \quad (1)$$

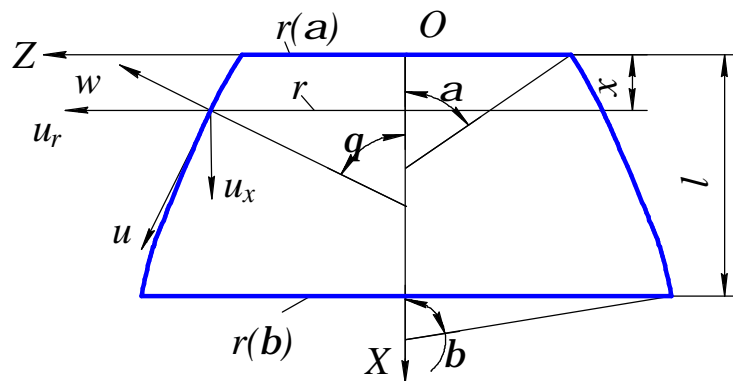
Здесь

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{u_r}{h}, \quad y_2 = \vartheta_1, \\ y_3 &= \frac{Q_r r}{Ehr_0}, \quad y_4 = \frac{M_1 r}{Eh^2 r_0}; \end{aligned} \quad (2)$$

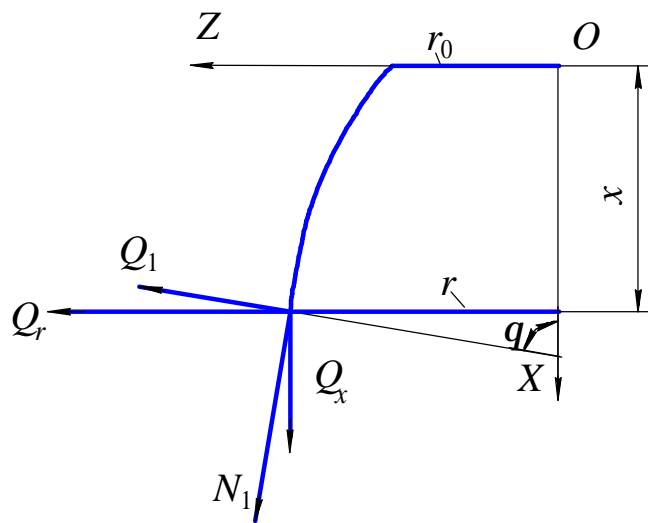
h – толщина оболочки в некоторой характерной точке меридиана;



Puc. 1



Puc. 2



Puc. 3

$$a_{11} = -\mu l \frac{ctg\theta}{r}, \quad a_{12} = -\frac{l}{h},$$

$$a_{13} = \frac{lr_0(1-\mu^2)}{\delta r} ctg\theta \cos\theta,$$

$$a_{22} = a_{11}, \quad a_{24} = \frac{12h^2lr_0(1-m^2)}{d^3r \sin q},$$

$$a_{31} = \frac{ld}{r_0r \sin q}, \quad a_{33} = -a_{11},$$

$$a_{42} = \frac{l\delta^3}{12h^2r_0r} ctg\theta \cos\theta,$$

$$a_{43} = -a_{12}, \quad a_{44} = -a_{11};$$

$$f_{1q} = -\frac{l(1-m^2)V_x(x)}{2pEh} \frac{V_x(x)}{dr} \cos q, \quad f_{2q} = 0,$$

$$f_{3q} = -\frac{l}{Ehr_0} \left(\mu \frac{V_x(\xi)}{2\pi r} + \frac{r}{\sin\theta} q_r \right),$$

$$f_{4q} = \frac{l}{2pEh^2r_0} V_x(x) ctg q;$$

$$V_x(x) = P_x + 2p \int_0^x \frac{rq_x}{\sin q} dx; \quad (4)$$

$$\begin{aligned} q_r &= q_1 \cos\theta + q_3 \sin\theta, \\ q_x &= q_1 \sin\theta - q_3 \cos\theta; \end{aligned} \quad (5)$$

$$x = \frac{x}{l};$$

x - расстояние плоскости произвольной параллели оболочки от ее верхнего края $q = a$ с радиусом параллели r_0 (рис. 2); l - длина (высота) оболочки, измеряемая вдоль ее оси вращения; $V_x(x)$ - проекция на ось x равнодействующей всех внешних сил, приложенных к части оболочки, ограниченной параллелями с радиусами r_0 и r ; P_x - равнодействующая усилий, приложенных к верхнему краю оболочки ($s = 0, \xi = 0$) (рис. 3).

Коэффициенты a_{ij} являются функциями ξ .

В выражениях (1) штрих означает производную по аргументу ξ .

Соотношения (1) являются обобщением уравнений, приведенных в [2], на случай оболочки вращения переменной толщины.

1.2. Через основные неизвестные, входящие в (1), можно выразить остальные искомые величины [1, 2]:

$$\begin{aligned} N_1 &= Q_r \cos\theta + \frac{V_x(\xi)}{2\pi r} \sin\theta, \\ Q_1 &= Q_r \sin\theta - \frac{V_x(\xi)}{2\pi r} \cos\theta, \end{aligned} \quad (3) \quad (6)$$

$$N_2 = \mu N_1 + E\delta \frac{u_r}{r}, \quad (7)$$

$$M_2 = \mu M_1 + \frac{E\delta^3}{12} \frac{\cos\theta}{r} \vartheta_1, \quad (8)$$

$$u = u_r \cos\theta + u_x \sin\theta, \quad (9)$$

$$w = u_r \sin\theta - u_x \cos\theta,$$

$$u_x = C + h \int_0^\xi z d\xi,$$

$$\begin{aligned} z(\xi) &= -\mu \frac{l}{r} y_1 + \frac{lctg\theta}{h} y_2 + \\ &+ \frac{lr_0(1-\mu^2)\cos\theta}{\delta r} y_3 + \\ &+ \frac{l(1-\mu^2)V_x(\xi)}{2\pi Eh} \frac{\sin\theta}{\delta r}, \end{aligned} \quad (10)$$

где C - произвольная постоянная, определяемая из условия закрепления оболочки в осевом направлении.

2. Интегрирование системы уравнений (1)

2.1. Рассмотрим однородную систему уравнений, соответствующую неоднородной системе (1):

$$y'_j = \sum_{k=1}^4 a_{jk} y_k, \quad j = 1, 2, 3, 4. \quad (11)$$

Интегрирование обеих частей каждого из уравнений системы (11) от некоторого начального значения ξ_0 до произвольного значения

$$\xi_i = \xi_0 + it$$

($i=1, 2, \dots, t$ - постоянный шаг интегрирования) дает

$$y_{j,i} = y_{j,0} + \sum_{k=1}^4 V_i^{jk}. \quad (12)$$

Здесь

$$V_i^{jk} = V^{jk}(\xi_i) = \int_{\xi_0}^{\xi_i} a_{jk} y_k d\xi, \quad (13)$$

$$y_{j,0} = y_j(\xi_0), \quad y_{j,i} = y_j(\xi_i).$$

Для вычисления интеграла (13) воспользуемся квадратурной формулой трапеций. Будем иметь для $i=1$:

$$V_1^{jk} = \frac{t}{2} (a_{jk,0} y_{k,0} + a_{jk,1} y_{k,1}), \quad (14)$$

где

$$a_{jk,0} = a_{jk}(\xi_0), \quad a_{jk,1} = a_{jk}(\xi_1), \quad y_{k,0} = y_k(\xi_0), \\ y_{k,1} = y_k(\xi_1).$$

Для $i \geq 2$ формула трапеций дает

$$V_i^{jk} = V_{i-1}^{jk} + \frac{t}{2} (a_{jk,i-1} y_{k,i-1} + a_{jk,i} y_{k,i}). \quad (15)$$

Здесь

$$a_{jk,i-1} = a_{jk}(\xi_{i-1}), \quad a_{jk,i} = a_{jk}(\xi_i), \\ y_{k,i-1} = y_k(\xi_{i-1}), \quad y_{k,i} = y_k(\xi_i).$$

Выражения (14) и (15) можно представить в таком виде ($i \geq 1$):

$$V_i^{jk} = F_i^{jk} + \frac{t}{2} a_{jk,i} y_{k,i}, \quad (16)$$

где будет

$$F_i^{jk} = F_{i-1}^{jk} + t a_{jk,i-1} y_{k,i-1} \quad (17)$$

для $i \geq 2$ и

$$F_1^{jk} = \frac{t}{2} a_{jk,0} y_{k,0} \quad (18)$$

для $i=1$.

Внося (16) в (12), после некоторых преобразований получим следующую систему линейных алгебраических уравнений для определения значений функций y_j ($j=1,2,3,4$)

при $\xi = \xi_i$ по их предшествующим значениям $y_{j,0}, y_{j,1}, \dots, y_{j,i-1}$:

$$A_{11,i} y_{1,i} + A_{12,i} y_{2,i} + A_{13,i} y_{3,i} = B_{1,i}, \\ A_{22,i} y_{2,i} + A_{24,i} y_{4,i} = B_{2,i}, \\ A_{31,i} y_{1,i} + A_{33,i} y_{3,i} = B_{3,i}, \\ A_{42,i} y_{2,i} + A_{43,i} y_{3,i} + A_{44,i} y_{4,i} = B_{4,i}. \quad (19)$$

Здесь ($j, k = 1, 2, 3, 4$)

$$A_{jk,i} = -\frac{t}{2} a_{jk,i}, \quad j \neq k; \\ A_{jj,i} = 1 - \frac{t}{2} a_{jj,i}; \quad (20)$$

$$B_{1,i} = y_{1,0} + F_i^{11} + F_i^{12} + F_i^{13}, \\ B_{2,i} = y_{2,0} + F_i^{22} + F_i^{24}, \\ B_{3,i} = y_{3,0} + F_i^{31} + F_i^{33}, \\ B_{4,i} = y_{4,0} + F_i^{42} + F_i^{43} + F_i^{44}. \quad (21)$$

2.2. Задаваясь различными совокупностями значений $y_{j,0}$ ($j = 1, 2, 3, 4$), можно, используя соотношения (19), построить все частные решения однородной системы уравнений (11).

Первые два частных решения $(y_{11}, y_{21}, y_{31}, y_{41})$ и $(y_{12}, y_{22}, y_{32}, y_{42})$ найдем путем интегрирования от начального значения $\xi_0 = 0$ с заданным шагом t при начальных условиях по верхнему краю оболочки $\theta = \alpha$:

$$y_{11,0} = 1, \quad y_{21,0} = 0, \quad y_{31,0} = 0, \quad y_{41,0} = 1$$

для первого решения и условиях

$$y_{12,0} = 0, \quad y_{22,0} = 1, \quad y_{32,0} = 1, \quad y_{42,0} = 0$$

для второго решения.

Полученные таким образом решения будут “возрастающими” по мере удаления от верхнего края оболочки вниз.

Третье $(y_{13}, y_{23}, y_{33}, y_{43})$ и четвертое $(y_{14}, y_{24}, y_{34}, y_{44})$ решения целесообразно строить интегрированием от значения $\xi_0 = 1$ с отрицательным шагом t ($t < 0$) при начальных условиях

$$y_{13,0} = 1, \quad y_{23,0} = 0, \quad y_{33,0} = 0, \quad y_{43,0} = 1$$

и, соответственно,

$$y_{14,0} = 0, \quad y_{24,0} = 1, \quad y_{34,0} = 1, \quad y_{44,0} = 0.$$

При этом получаются решения, “возрастающие” при движении от нижнего края оболочки вверх.

2.3. Признаком линейной независимости решений $(y_{11}, \dots), \dots, (y_{14}, \dots)$ является неравенство нулю определителя

$$D(\xi) = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{34} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} & y_{44} \end{vmatrix}. \quad (22)$$

В [3] показано, что

$$D(\xi) = D_0 \exp\left(\int_0^\xi (a_{11} + \mathbf{L} + a_{44}) d\xi\right),$$

где D_0 - значение определителя (22) при $\xi = 0$.

В нашем случае согласно (3)

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} = 0.$$

Поэтому

$$D(\xi) = D_0 = \text{const}. \quad (23)$$

Условие (23) можно использовать для контроля правильности вычисления значений функций y_{11}, \dots, y_{44} .

2.4. Частное решение $(y_{1q}, y_{2q}, y_{3q}, y_{4q})$ системы (1), соответствующее заданной поверхностной нагрузке, целесообразно искать, применяя метод вариации постоянных [3]:

$$y_{jq} = \sum_{i=1}^4 D_i y_{ji}, \quad j = 1, 2, 3, 4. \quad (24)$$

Здесь y_{ji} - совокупность всех линейно независимых решений системы однородных уравнений (11), $D_i(\xi)$ - функции, определяемые из соотношений

$$D_i(\xi) = \int_1^\xi D_i'(\xi) d\xi \quad (25)$$

для $i = 1, 2$ и

$$D_i(\xi) = \int_0^\xi D_i'(\xi) d\xi \quad (26)$$

для $i = 3, 4$.

Сами производные $D_i'(\xi)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) согласно методу вариации произвольных постоянных находятся из зависимостей

$$\sum_{i=1}^4 D_i' y_{ji} = f_{jq} \quad (27)$$

или

$$[Y][Z] = [F]. \quad (28)$$

Здесь

$$[Y] = [y_{jk}(\xi_i)], \quad j, k = 1, 2, 3, 4,$$

$$[Z] = [D'_1 D'_2 D'_3 D'_4]^T,$$

$$[F] = [f_{1q} f_{2q} f_{3q} f_{4q}]^T.$$

Решая систему (28), получаем значения производных $D'_i(\xi)$ для последующего интегрирования по (25) и (26).

2.5. Располагая всеми частными решениями $y_{11}, \dots, y_{44}, y_{1q}, \dots, y_{4q}$, можно построить и общее решение системы(1):

$$y_1 = \sum_{k=1}^4 C_k y_{1k} + y_{1q}, \quad y_2 = \sum_{k=1}^4 C_k y_{2k} + y_{2q},$$

$$y_3 = \sum_{k=1}^4 C_k y_{3k} + y_{3q}, \quad y_4 = \sum_{k=1}^4 C_k y_{4k} + y_{4q}. \quad (29)$$

Здесь C_1, C_2, C_3, C_4 - произвольные постоянные, определяемые из граничных условий.

По выражениям (29) легко вычислить и значения основных искомым функций u_r, ϑ_1, Q_r и M_1 :

$$u_r = h y_1, \quad \vartheta_1 = y_2,$$

$$Q_r = E h \frac{r_0}{r} y_3, \quad M_1 = E h^2 \frac{r_0}{r} y_4. \quad (30)$$

3. Числовой пример

3.1. В качестве примера рассмотрим оболочку вращения переменной толщины, срединная поверхность которой представляет собой пояс эллипсоида вращения (рис. 4). Оболочка сверху имеет отверстие, закрытое абсолютно жесткой крышкой. По нижнему краю оболочка жестко закреплена. Уравнение срединной поверхности оболочки:

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 + \left(\frac{b-c-x}{b}\right)^2 = 1. \quad (31)$$

Здесь a, b - большая и малая полуоси эллипса, вращением которого получается срединная поверхность рассматриваемой оболочки; c - расстояние верхнего края оболочки от ее теоретической вершины.

Из (31) находим

$$r = a \sqrt{1 - \left(k - \frac{l}{b} \xi\right)^2}, \quad (32)$$

где

$$k = 1 - \frac{c}{b}, \quad \xi = \frac{x}{l}.$$

Имея в виду, что

$$ctg \theta = \frac{dr}{dx} = \frac{1}{l} \frac{dr}{d\xi},$$

из (32) выводим

$$ctg \theta = \frac{a^2}{br} \left(k - \frac{l}{b} \xi\right). \quad (33)$$

По значениям $ctg \theta$ можно определить и $\sin \theta$.

3.2. Примем, что толщина $\delta(\xi)$ рассматриваемой оболочки изменяется вдоль меридиана ее срединной поверхности по закону

$$\delta(\xi) = h_0 - (h_0 - h) \left[2 \frac{s}{L} - \left(\frac{s}{L}\right)^2 \right]. \quad (34)$$

Здесь s - расстояние произвольной точки меридиана срединной поверхности оболочки от ее верхнего края, измеряемое вдоль меридиана:

$$s(\xi) = l \int_0^\xi \frac{d\xi}{\sin \theta}, \quad (35)$$

$L = s(1)$ - полная длина меридиана оболочки, h_0, h - толщины оболочки при $\xi = 0$ и, соответственно, при $\xi = 1$.

3.3. Геометрические параметры оболочки примем следующими:

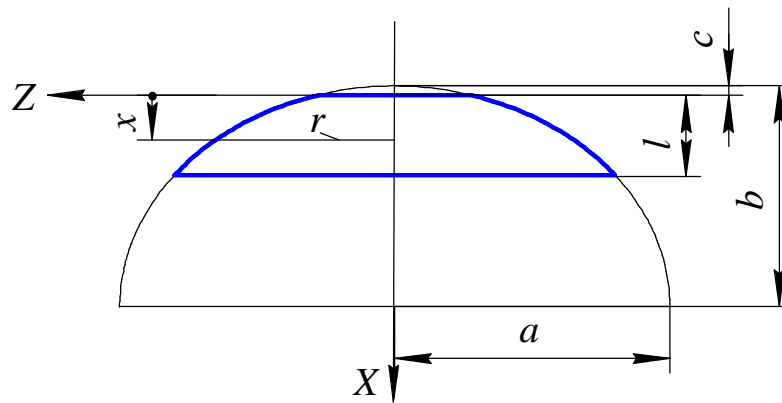


Рис. 4

$$a = 1000 \text{ мм}, \quad b = 800 \text{ мм},$$

$$c = 32 \text{ мм}, \quad l = 288 \text{ мм},$$

$$h_0 = 6 \text{ мм}, \quad h = 3 \text{ мм}.$$

Модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки:

$$E = 6,8 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \quad \mu = 0,3.$$

В таблице 1 представлены значения меридиональных (σ_{11}^- , σ_{11}^+) и окружных (σ_{22}^- , σ_{22}^+) напряжений в точках внутренней и наружной поверхностей рассматриваемой оболочки при действии на нее равномерного внутреннего давления $q_3 = 0,1$ МПа. Напряжения даны в МПа.

Шаг интегрирования $t = 1/2000$.

Таблица 1

x	$s, \text{ мм}$	s_{11}^-	s_{11}^+	s_{22}^-	s_{22}^+
0	0	21,91	1,213	6,572	0,364
0,1	106,4	10,28	13,88	10,21	10,70
0,2	189,1	12,99	14,17	12,58	12,88
0,3	259,0	14,85	14,98	13,35	13,40
0,4	320,6	15,99	16,06	13,80	13,84
0,5	376,4	16,91	16,93	14,17	14,20
0,6	427,8	17,39	17,82	14,39	14,54
0,7	475,4	16,77	19,40	13,92	14,79
0,8	520,2	15,35	21,31	11,77	13,81
0,9	562,6	17,66	18,92	8,356	9,133
1,0	603,0	33,37	2,570	10,01	0,771

Список литературы

1. Ахмедьянов И. С. Расчет оболочек вращения переменной толщины при осесимметричном и антисимметричном нагружении/ Самар. гос. аэрокосмич. ун-т. - Самара, 1999. – 46 с. - Деп. в ВИНТИ 17.12.99, N 3765-B99.

2. Бидерман В. Л. Механика тонкостенных конструкций. Статика. - М.: Машиностроение, 1977.

3. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. Изд. 6-е. - М.: Гостехиздат, 1953.