УДК 519.7

ОПТИМИЗАЦИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СЛЕДЯЩЕЙ СИСТЕМЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЧИСЛЕННЫХ И ЭВОЛЮЦИОННЫХ МЕТОДОВ

2007 М. А. Федорова

Ульяновский государственный университет

В работе исследуется применение эволюционных и численных методов для оптимизации сложных взаимосвязанных систем фильтрации и управления в условиях априорной неопределенности на примере стохастической следящей системы (для краткости, – трекера). Для сравнения различных подходов проведены серии экспериментов на специально разработанном программном продукте. При моделировании трекера обнаружение нарушений производится на основе метода взвешенных квадратов невязок, адаптация – на основе метода вспомогательного функционала качества, а в качестве алгоритмов идентификации использованы – для сравнения их возможностей – метод простой стохастической аппроксимации, метод наименьших квадратов и генетический алгоритм. В сравнительном аспекте исследуется применение эволюционных и численных методов для оптимизации сложных взаимосвязанных систем фильтрации и управления на примере стохастической следящей системы.

Постановка задачи

Рассмотрим заданную в пространстве состояний линейную инвариантную во времени стохастическую систему с контуром управления:

$$x(t_{i+1}) = \Phi_q x(t_i) + \Psi_q u(t_i) + w(t_i), \quad x \in R^n, \tag{1}$$

$$y(t_i) = H_q x(t_i) + \nu(t_i), \quad y \in R^m, \tag{2}$$

$$\hat{x}_0(t_{i+1}^-) = \Phi_0 \hat{x}_0(t_i^+) + \Psi_0 u(t_i), \quad \hat{x}_0 \in R^n, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &\hat{x}_0(t_i^+) = \hat{x}_0(t_i^-) + K_0 \nu(t_i), \\ &\nu(t_i) = y(t_i) - H_0 \hat{x}_0(t_i^-), \end{aligned} \tag{4}$$

$$u(t_i) = \begin{cases} f_R[\hat{x}_0(t_i^+)], \\ -G_0^* \hat{x}_0(t_i^+), \quad u \in R^q. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь $i \in Z$; (1) – объект и (2) – сенсор, параметризованные параметром неопределенности q; (3)-(4) – фильтр Калмана, спроектированный для некоторого номинального значения q_0 параметра q; (5) – управление; $\{w(\cdot)\}$, $\{\nu(\cdot)\}$ считаются независимыми последовательностями независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым средним значением и ковариациями $Q_q \geq 0$ и $R_q > 0$ соответственно.

Матрицы, присутствующие в системе (1)-(5), заданы как Φ_0, Ψ_0, Q_0, H_0 и R_0 для номинального режима работы, т.е. для номинального значения $q_0 \in \Theta$ параметра неопределенности $q \in \Theta$, взятого из множества Θ возможных режимов.

Предполагается, что параметр q подвержен внезапным изменениям. Каждое изменение случается в неизвестный момент времени $t_c > t_0$. Это событие можно рассматривать как переключение q с q_0 на некоторое другое неизвестное значение $q_1 \in \Theta$. Чтобы поддерживать обратную связь (ОС) близкой к оптимальной, для вновь возникшего режима (определенного параметром q_1) необходимо соответствующим образом ее перенастроить. Оптимальной перенастройкой является альтернативный фильтр Калмана (KF_1), которому соответствует q_1 с коэффициентом K_1. Таким образом, ОС перенастраивается и (отмечена нижним индексом $_1$) подставляется вместо начальной обратной связи (отмечена нижним индексом $_0$).

Проблема заключается в том, что оптимальную перенастройку нельзя выполнить, потому что q_1 и t_c неизвестны и, таким образом, могут быть заменены только на оценки $\hat{q}_1$ и $\hat{t}_c$, полученные от некоторого практически применимого алгоритма оценки параметра для перенастройки. Можно выполнить только субоптимальную перенастройку и при этом необходимо решать две задачи: обнаружения и адаптации.

1. Обнаружение. Необходимо с наименьшими затратами обнаружить каждый момент изменения t_c с приемлемой задержкой и требуемой надежностью, т.е. необходим некоторый генератор решений DG. В момент тревоги t_a генератор подтверждает внезапное изменение и задает $\hat{t}_c := t_a$.

Будем оценивать момент t_c, используя номинальную ковариацию C_0 последовательности $n(t_i)$ в (4) и специально сконструированную решающую функцию в форме кумулятивной суммы [1]:

$$S_k = \sqrt{m/(2k)} \sum_{i=1}^{k} [n^T(t_i) C_0^{-1} n(t_i) / m - 1] .$$

Задача состоит в обнаружении (за приемлемый промежуток времени) момента нарушения t_c при помощи подходящего решающего правила $d_0(t_k) \in \{0,\ 1\}$ [1]. Ниже представлен один из вариантов такого правила.

Решение принимается в конце интервала выборки номер $l = 1,\ 2,\ \ldots,\ L$, каждый размера N:

$$d_0(l) = \begin{cases} 0 \text{ if } \forall k = 1, \ldots, N : \left| S^{(0)}_{N(l-1)+k} \right| < h; \text{ отбой}, \\ 1 \text{ if } \exists k = 1, \ldots, N : \left| S^{(0)}_{N(l-1)+k} \right| \geq h; \text{ тревога}. \end{cases}$$

Если «тревога», то генератор подтверждает внезапное изменение и включает алгоритм адаптации.

2. Адаптация. После того, как принято решение о том, что произошло нарушение (сигнал «тревога»), необходимо провести адаптацию системы к вновь возникшему режиму работы с q_1. Для этого за основу взят метод вспомогательного функционала качества. При этом в качестве возможных методов идентификации для сравнения выбирать будем из следующего списка:

- простая стохастическая аппроксимация;
- метод наименьших квадратов;
- генетический алгоритм.

Моделирование стохастической следящей системы

Стохастическая следящая система (трекер) – система, состоящая из двух независимых подсистем: соответственно, замкнутого и разомкнутого типа. Таким образом, в трекере некоторый «управляемый объект» следит за некоторой «опорной моделью». Следящая система в обобщенном виде может быть представлена как система (1) - (5), где векторы и матрицы представлены в виде

$$x = \begin{bmatrix} x_p \\ x_r \end{bmatrix},\ \Phi = \begin{bmatrix} \Phi_p & 0 \\ 0 & \Phi_r \end{bmatrix},\ \Psi = \begin{bmatrix} \Psi_p \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$w = \begin{bmatrix} w_p \\ w_r \end{bmatrix},\ Q = \begin{bmatrix} Q_p & 0 \\ 0 & Q_r \end{bmatrix},$$

$$y = \begin{bmatrix} y_p \\ y_r \end{bmatrix},\ H = \begin{bmatrix} H_p & 0 \\ 0 & H_r \end{bmatrix},$$

$$v = \begin{bmatrix} v_p \\ v_r \end{bmatrix},\ R = \begin{bmatrix} R_p & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix},$$

$$u(t_i) = -G_p \hat{x}_{0p}(t_i^+) - G_r \hat{x}_{0r}(t_i^+).$$

Здесь индекс «*p*» обозначает «управляемый объект», а индекс «*r*» – «опорную модель».

Для моделирования возьмем пример из [2] и конкретизируем следящую систему:

$$x(t_{i+1}) = \begin{bmatrix} 0.82 & 0 \\ 0 & 0.61 \end{bmatrix} x(t_i) + \begin{bmatrix} 0.18 \\ 0 \end{bmatrix} u(t_i) + w(t_i),$$

$$y(t_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t_i) + v(t_i),$$

$$\hat{x}_0(t_{i+1}^-) = \begin{bmatrix} 0.82 & 0 \\ 0 & 0.61 \end{bmatrix} \hat{x}_0(t_i^+) + \begin{bmatrix} 0.18 \\ 0 \end{bmatrix} u(t_i),$$

$$\hat{x}_0(t_i^+) = \hat{x}_0(t_i^-) + \left[K_{0p}\ \ K_{0r}\right]\left(y(t_i) - \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\hat{x}_0(t_i^-)\right),$$

$$u(t_i) = \begin{bmatrix}0.36\\ -0.19\end{bmatrix}\hat{x}_0(t_i^+).$$

Моделирование неопределенности следящей системы ограничим первым, но достаточно типичным случаем, когда неизвестными или резко изменяющимися величинами могут быть лишь параметры (ковариации) шумов.

Адаптивный фильтр и функция чувствительности

Адаптивную модель построим для оценивания состояния объекта и для определения невязки, т. е. разности между состоянием адаптивной модели и состоянием объекта. Критерий качества зададим в виде функции от невязки [3]. При этом предполагаем, что невязка такова, что минимум критерия качества достигается только при таких значениях параметров модели, которые в точности совпадают с фактическими значениями соответствующих параметров объекта и/или оптимального установившегося фильтра.

Присоединим к системе (1)-(5) адаптивную модель, совпадающую по своей структуре с фильтром Калмана. При этом получаем общую структуру моделируемого трекера с присоединенным блоком обнаружения нарушений и блоком адаптивного фильтра (рис. 1).

Поскольку из-за априорной неопределенности критерий качества системы недоступен непосредственному измерению, то особый интерес для решения задачи идентификации представляет теория вспомогательного функционала качества (ВФК) [3]. Исходный функционал качества (ИФК) от недо-

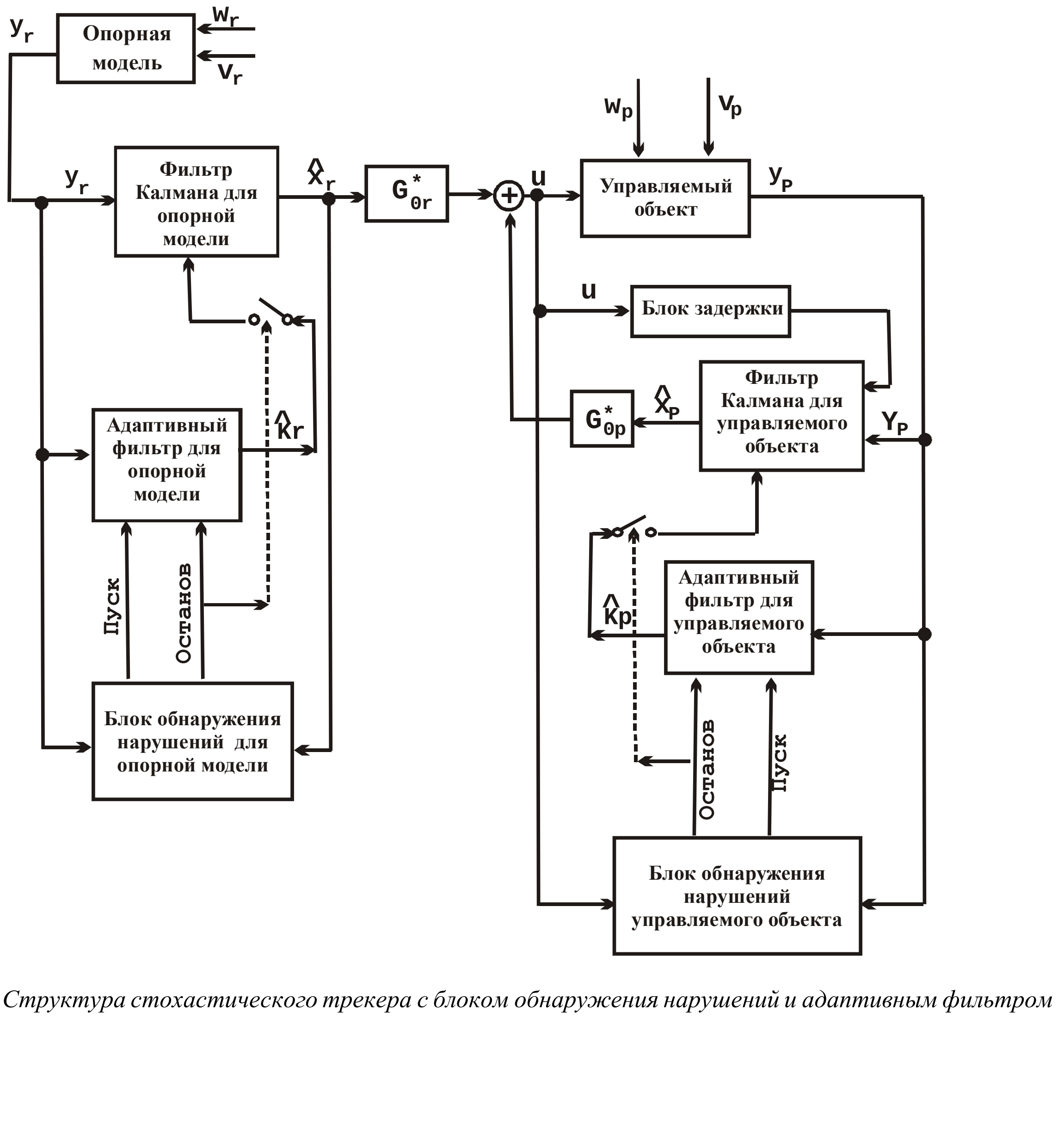

Рис. 1. Структура стохастического трекера с блоком обнаружения нарушений и адаптивным фильтром

ступной ошибки $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ зададим следующим образом:

$$J_e(q) = \mathrm{E}\left\{F\left(e(t),q\right)\right\}.$$

Будем конструировать вспомогательный функционал качества, содержащий только известные величины (в зависимости от уровня неопределенности в понятие «доступная информация» вкладывается различный смысл). В основу ВФК положим такую величину $e(t)$, которая является аналогом $e(t)$ в ИФК:

$$J_e(q) = \mathrm{E}\left\{F\left(e(t),q\right)\right\}.$$

Условием оптимальности адаптивного фильтра является достижение минимума функционалом качества, исходя из чего равенство нулю градиента

$$\nabla_q J_e(t) = e^T(t)S(t) = \vec{0}$$

будет необходимым условием оптимальности. Матрица $S(t)$ определяется равенством

$$S(t) = \left[\frac{\partial e(t)}{\partial q_1} \quad \ldots \quad \frac{\partial e(t)}{\partial q_N}\right] = \nabla_q e(t),$$

где N – размерность модельного параметра. Критерий оптимальности, выраженный в виде функции вектора параметров q, $J_e(t,q)$, в явной форме неизвестен. Это значит, что известны лишь реализации величины произведения $e^T(t,q) \cdot S(t,q)$, которые зависят от вектора q. Задача состоит в определении оптимального значения q^* вектора q, доставляющего минимум функционалу качества. Очевидно, единственно возможный путь решения этой задачи связан с наблюдением текущей реализации и ее обработкой, поскольку минимизируемый ИФК содержит оператор математического ожидания по всему ансамблю реализаций.

Отыскание оптимального вектора будем проводить численными и эволюционными методами.

Численные и эволюционные методы

Рассмотрим численные методы.

1. Простая стохастическая аппроксимация. Данный алгоритм представляет собой стохастический аналог градиентного метода, который обычно записывают в виде

$$\hat{q}[n+1] = \hat{q}[n] - l[n+1]e^T[n]S[n],$$

$$l[n+1] = \frac{1}{n+1},$$

$$n = 1, 2, \ldots, K.$$

2. Метод наименьших квадратов. Запишем общий вид алгоритма

$$\hat{q}[n+1] = \hat{q}[n] - \Lambda[n+1]e^T[n]S[n],$$

$$n = 1, 2, \ldots, K.$$

В частном случае – для метода наименьших квадратов – множитель определяется по формуле

$$\Lambda[n+1] = \Lambda[n] - \Lambda[n]S^T[n](S[n]\Lambda[n]S^T[n])^{-1}S[n]\Lambda[n].$$

Эволюционные методы принадлежат направлению, которое описывает системы по типу вычислительных моделей эволюционных процессов. Эволюционные алгоритмы включают в себя три главных направления фундаментальных исследований: генетические алгоритмы, эволюционное моделирование (эволюционные стратегии) и эволюционное программирование [5]. Приведем названия генетических операторов, которые использовались при исследованиях.

Оператор кодирования – оператор, при помощи которого осуществляется кодирование параметров и декодирование хромосом. При моделировании на выбор предлагаются следующие три разновидности оператора кодирования: двоичное кодирование, интервальное кодирование с бинарным кодом и интервальное кодирование с кодом Грея.

Фитнес-функция – функция оценки приспособленности индивида. Данная функция построена на основе метода статистической ортогональности (реализуемого по схеме полярного коррелометра). Значение фитнес-функции сопоставляется каждой хромосоме в популяции, при этом чем больше значение функции, тем лучше приспособленность данного индивида. Для получения оценок всех индивидов в текущей популяции необходима выборка размера M.

Отбор – оператор, посредством которого осуществляется копирование хромосом, согласно их приспособленности, в промежуточную популяцию для последующего применения операторов скрещивания и мутации и для формирования таким образом новой популяции. При моделировании на выбор предлагаются следующие два вида этого оператора: «колесо рулетки» и остаточный отбор.

Скрещивание – оператор, который с определенной вероятностью применяется к хромосомам, выбранным оператором отбора. В результате действия этого оператора происходит появление новых индивидов в популяции. При этом скрещивание может быть: одноточечным, двуточечным и маскированным.

Мутация – оператор, который применяется к каждому потомку индивидуально после скрещивания. Мутация случайно изменяет ген хромосомы с небольшой (задаваемой эмпирически) вероятностью.

Элитизм – оператор, задаваемый коэффициентом элитизма. Коэффициент элитизма – это число хромосом, переходящих из текущей популяции в новую популяцию без применения каких-либо генетических операторов.

Результаты вычислительных экспериментов

Для проведения экспериментов предложенные алгоритмы полностью реализованы в специально разработанном программном продукте MASSS [6]. MASSS позволяет наблюдать за поведением различных процессов стохастической системы, обнаруживать нарушения в системе и проводить ее адаптацию к новым условиям. При моделировании в этом приложении доступны следующие функции:

- выбор моделируемых систем (управляемый объект, опорная модель, управляемый объект и опорная модель);
- выбор точки внезапного изменения;
- выбор алгоритмов идентификации (простая стохастическая аппроксимация, метод наименьших квадратов, генетический алгоритм);
- выбор типа сглаживания оценки градиента (экспоненциальное, с фиксированными отсчетами, скользяще среднее);
- изменение параметров модели;
- изменение параметров алгоритмов;
- визуализация данных;
- просмотр данных в табличном виде и т. д.

Для тестирования алгоритмов проведены несколько серий экспериментов. Параметры одной из серий представлены ниже в таблице 1.

На рис. 2 представлено поведение генетического алгоритма в качестве метода идентификации.

Для проведения сравнительного анализа различных алгоритмов идентификации использована интегральная относительная ошибка (IPE), усредненная по результатам серии экспериментов. Графики изменения относительной ошибки простой стохастической аппроксимации, метода наименьших квадратов и генетического алгоритма в зависимости от номера итерации представлены на рис. 3

Как показывают результаты экспериментов, в большинстве случаев усредненное поведение генетического алгоритма дает меньший уровень относительной ошибки по сравнению с процедурой простой стохастической аппроксимации или методом наименьших квадратов. Однако следует отметить, что поведение генетического алгоритма более непостоянно, чем поведение стандартных численных методов. Численные методы последовательны в своих операциях, в то время как генетический алгоритм – параллелен и требует наличия множества индивидов, формирующих текущую популяцию адаптивных фильтров.

Таблица 1. Параметры серии экспериментов

Общие параметры	
Количество экспериментов в серии	100
Максимальной количество итераций	5000
Параметры и обозначения численных алгоритмов	
Простая стохастическая аппроксимация	ПСА
Метод наименьших квадратов	МНК
Параметр экспоненциального сглаживания	0.5
Параметры и обозначения генетического алгоритма	
Генетический алгоритм	ГА
Длина хромосомы	7
Мощность популяции	50
Вероятность мутации	0.1
Вероятность скрещивания	0.8
Коэффициент элитизма	1
Режим отбора	остаточный отбор
Режим скрещивания	маскированный
Кодирование	интервальное с кодом Грея
Параметры внезапного изменения и идентификации	
Итерация внезапного изменеия	300
Истинное значение идентифицируемого параметра *до изменения* (опорная модель)	0.258
Истинное значение идентифицируемого параметра *после изменения* (опорная модель)	0.736
Истинное значение идентифицируемого параметра *до изменения* (управляемый объект)	0.900
Истинное значение идентифицируемого параметра *после изменения* (управляемый объект)	0.547

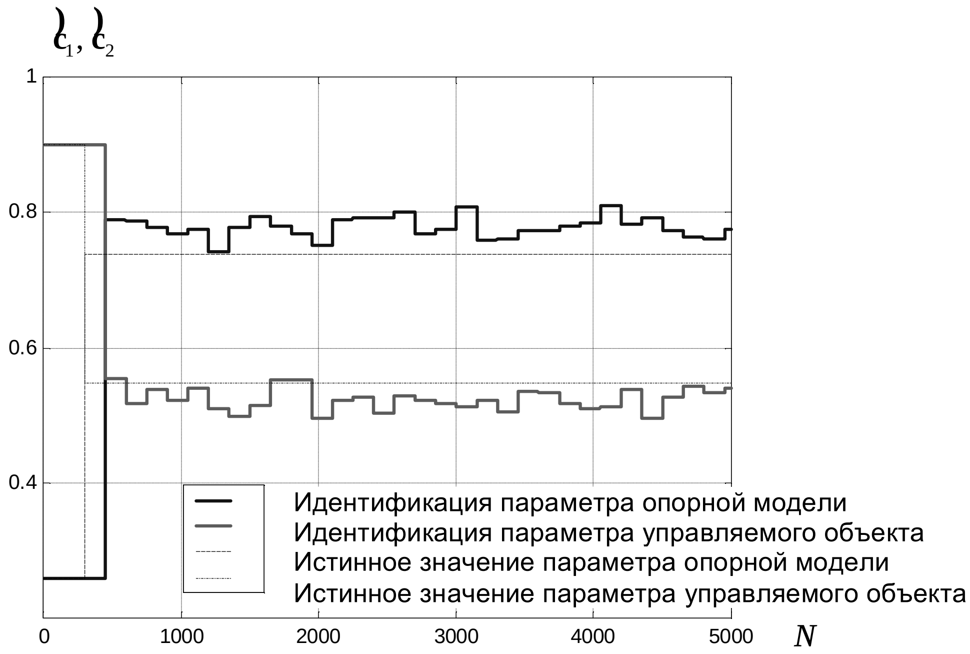

Рис. 2. Зависимости оценок параметров опорной модели (ξ_1) и управляемого объекта (ξ_2) от номера итерации N

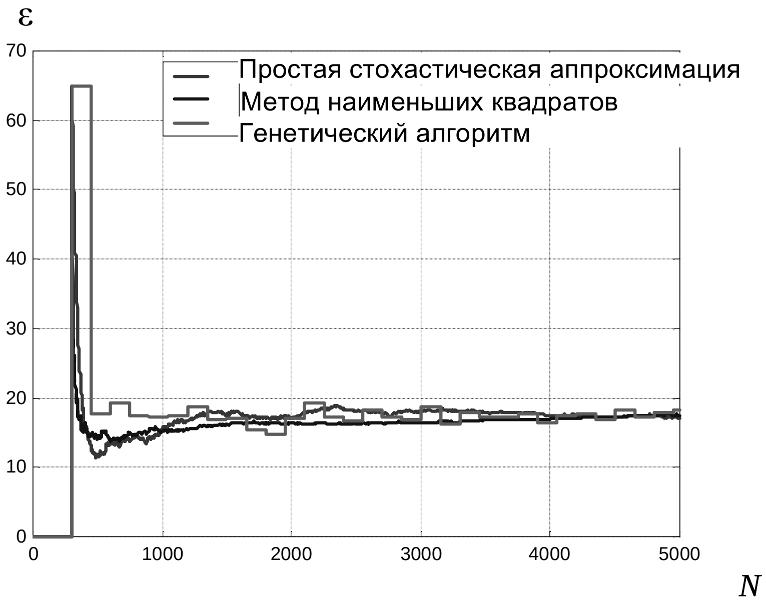

Рис. 3. Сравнительные зависимости относительных ошибок методов идентификации от номера итерации N

На основании проведенных экспериментов можно сделать вывод о пригодности эволюционных методов к решению указанной задачи оптимизации.

Список литературы

1. Семушин И. В. Контроль оптимальности адаптивного фильтра Калмана по реализации скалярного процесса // Известия академии наук СССР. Техническая кибернетика, 1979.– № 6.

2. Maybeck P. S. Stochastic models, estimation and control. – New York: Academic Press, 1982, Vol.3.

3. Семушин И. В. Адаптивное управление стохастическим линейным объектом в условиях неопределенности. // Нелинейные динамические системы: качественный анализ и управление / Сб. научных трудов. Институт системного анализа РАН. Под ред. акад. РАН С. В. Емельянова, чл.-корр. РАН С.К. Коровина. – М.: Изд-во МГУ. - 1994. Вып. 2.

4. Semoushin I. V., Tsyganova J. V. Indirect Error Control for Adaptive Filtering. // Proceedings of the. Third European Conference on Numerical Mathematics and Applied Applications/ Eds. P. Neittaanmaki, T. Tiihonen and P. Tarvainen, World Scientific, 2000.

5. Ярушкина Н. Г. Основы теории нечетких и гибридных систем: Учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2004.

6. Федорова М. А. Моделирование адаптивной стохастической системы MASSS. // Москва: ВНТИЦ. Программное и информационное обеспечение поддержки научно исследовательских работ, 2007.– ЕСПД. 03254577.01880-01.