

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ОРБИТАЛЬНОЙ ТРОСОВОЙ СИСТЕМЫ С УЧЁТОМ КОЛЕБАНИЙ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

© 2008 В. С. Асланов¹, Н. Р. Стратилатов²

¹Самарский государственный аэрокосмический университет

²Государственный научно-производственный ракетно-космический центр
«ЦСКБ-Прогресс»

Рассматривается механическая система, включающая в себя космический аппарат (КА), весомый трос и концевой груз. КА представляется как твёрдое тело, совершающее движение центра масс и вокруг центра масс под действием гравитационного момента и момента от силы натяжения троса. С помощью уравнения Лагранжа второго рода получена математическая модель плоского движения представленной механической системы. Показано, что полученная модель может быть использована как для анализа развёртывания тросовой системы, так и для изучения поведения самого КА.

Космический аппарат, трос, орбитальное движение, колебания, уравнения Лагранжа, плоское движение

Формулировка проблемы

Анализу космических тросовых систем посвящены многочисленные научные работы, например [1-11], в которых объектами исследований являлись трос, полезный груз и КА. Орбитальные тросовые системы могут применяться для различных задач перемещения полезной нагрузки в космическом пространстве, в том числе и для доставки полезной нагрузки на поверхность Земли. В этом случае могут реализовываться два способа развёртывания тросовой системы: статический и динамический [4, 8]. При динамическом развёртывании трос выпускается быстрее, чем при статическом развёртывании, и под действием кориолисовой силы капсула отклоняется от вертикали, а затем, после того как трос развёрнут на полную длину, начинается возвратное движение капсулы к вертикали. Переменная по величине и направлению сила натяжения троса создаёт дополнительный момент, под действием которого КА совершает нестационарные колебания относительно центра масс, что в свою очередь приводит, например, к возникновению нежелательных дополнительных микроускорений [12] при отказе системы ориентации и при её работе [13]. В известных математических моделях космических тросовых систем [1-11] КА рассматривается как мате-

риальная точка, и это обстоятельство не позволяет использовать их для анализа движения самого КА как твёрдого тела.

В предлагаемой работе считается, что КА представляет собой твёрдое тело, совершающее движение центра масс и вокруг центра масс под действием гравитационной силы, гравитационного момента и момента от силы натяжения троса. Выбор той или иной физической модели системы «КА + трос с концевым модулем» обусловлен режимами её движения и целями исследований. Физическую модель будем определять следующим образом. КА задан как твёрдое тело с главными осями инерции; центр масс КА и точка выпуска в процессе развёртывания троса или точка крепления, когда трос уже выпущен, не совпадает с центром масс КА. Длина троса изменяется, масса троса пропорциональна длине. Концевой модуль – материальная точка. Математическая модель будет составлена с помощью корректного и весьма эффективного метода – уравнения Лагранжа второго рода [14]. Следует учесть, что сила натяжения троса, как правило [8], представляется управлением и является непотенциальной. Математическая модель должна быть достаточно простой, легко интерпретируемой, сохранять основные особенности физической модели и отражать основные закономернос-

ти движения системы. Это позволит проверить основные предположения по поведению системы.

Кинетическая энергия системы

При выводе уравнений движения будем пренебрегать гибкостью троса. Единственная сила, действующая на трос – гравитационная сила. Аэродинамической силой и солнечным давлением будем пренебрегать. На концах троса находятся КА массой m_1 и груз - материальная точка массой m_2 . В качестве обобщённых координат примем: $q_1 = r = OC$ - расстояние между центром Земли и центром масс системы C (рис. 1), $q_2 = l$ - длина троса, $q_3 = J$ - угол истинной аномалии центра масс системы, $q_4 = j$ - угол отклонения троса относительно линии OC , $q_5 = a$ - угол отклонения оси КА O_1x_1 относительно троса. Согласно процедуре Лагранжа составим выражение для кинетической энергии системы, в данном случае в виде суммы четырёх слагаемых:

$$T = T_C + T_l + T_{TC} + T_{КА}, \quad (1)$$

где T_C - кинетическая энергия центра масс системы; T_l - кинетическая энергия, связанная с удлинением троса; T_{TC} - кинетическая

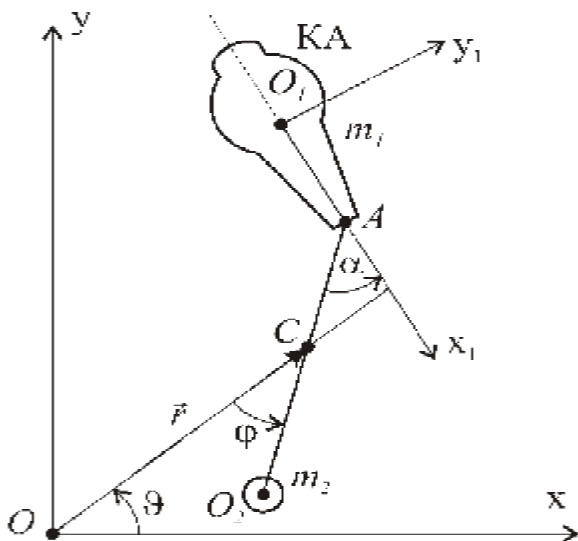


Рис. 1. КА с тросовой системой

энергия вращения весомого троса и двух материальных точек O_1 и O_2 массой, соответственно, m_1 и m_2 относительно центра масс системы C ; $T_{КА}$ - кинетическая энергия относительного вращения КА. При записи выражения для кинетической энергии (1) предполагалось, что плечо силы натяжения $\Delta = O_1A$ значительно меньше длины троса l .

Поступательная кинетическая энергия соответствует абсолютному движению центра масс системы по орбите и включает в себя радиальную и трансверсальную скорости:

$$T_C = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{J}^2), \quad (2)$$

где $m = m_1 + m_2 + m_t$ - полная масса системы, $m_t(l) = rSl$ - масса троса (r - плотность троса, S - площадь поперечного сечения троса), $m_1 = m_1^0 - m_t$ - текущая масса КА, m_1^0 - начальная масса КА.

Кинетическая энергия удлинения троса может быть представлена в виде [15]

$$T_l = \frac{1}{2} \frac{m_1(m_2 + m_t)}{m} \dot{l}^2 = \frac{1}{2} m_t(l) \dot{l}^2, \quad (3)$$

где $m_t(l)$ - редуцированная масса троса.

Кинетическую энергию вращения весомого троса и двух материальных точек O_1 и O_2 запишем следующим образом:

$$T_{TC} = \frac{1}{2} I_C w^2, \quad (4)$$

где I_C - момент инерции тросовой системы (трос и две материальные точки O_1 и O_2) относительно центра масс системы, w - абсолютная угловая скорость вращения гантели. Для выбранных обобщённых координат (рис. 1) выражение для угловой скорости имеет вид

$$w = \dot{J} + j\dot{l}. \quad (5)$$

Момент инерции тросовой системы относительно центра масс C в обобщённых координатах определим в виде четырёх слагаемых:

$$I_C = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \frac{rS}{3}(r_1^3 + r_2^3), \quad (6)$$

$$\text{где } r_1 = O_1 C \approx AC = \frac{m_2 + \frac{m_t}{2}}{m} l,$$

$$r_2 = O_2 C = \frac{m_1 + \frac{m_t}{2}}{m} l.$$

После преобразований и упрощений момент инерции тросовой системы (6) может быть записан в виде [14]:

$$I_C(l) = \left[\frac{(2m_1 + m_t)(2m_2 + m_t)}{4m} - \frac{m_t}{6} \right] l^2 = m_*(l)l^2, \quad (7)$$

где $m_*(l)$ - редуцированная масса тросовой системы. Подставим (5) и (7) в (4) и в результате получим кинетическую энергию вращения тросовой системы относительно центра масс:

$$T_{TC} = \frac{1}{2} m_* l^2 (\dot{\mathcal{J}} + \dot{\mathcal{J}}_0)^2. \quad (8)$$

Осталось определить кинетическую энергию вращения КА относительно собственного центра O_1 :

$$T_{KA} = \frac{1}{2} I_z w_{KA}^2 = \frac{1}{2} I_z (\dot{\mathcal{J}} + \dot{\mathcal{J}}_0 + \dot{\mathcal{A}})^2, \quad (9)$$

где I_x, I_y, I_z - главные моменты инерции КА в связанной системе координат $O_1 x_1 y_1 z_1$ (рис. 1).

Если подставить (2), (3), (8) и (9) в выражение (1), то получим кинетическую энергию системы в виде

$$T = \frac{1}{2} \left[m(\dot{\mathcal{R}} + r^2 \dot{\mathcal{J}}) + m_1(l)\dot{\mathcal{R}} + m_*(l)l^2(\dot{\mathcal{J}} + \dot{\mathcal{J}}_0)^2 + I_z(\dot{\mathcal{J}} + \dot{\mathcal{J}}_0 + \dot{\mathcal{A}})^2 \right] \quad (10)$$

Потенциальная энергия системы

Потенциальная энергия системы состоит из потенциальной энергии тросовой системы (весомый негибкий трос и две точечные массы на концах O_1 и O_2) [15]

$$P_{TC} = -\frac{mm}{r} + \frac{mm_* l^2}{2r^3} (1 - 3\cos^2 j), \quad (11)$$

где m - гравитационный параметр, и потенциальной энергии для твёрдого тела (КА) в центральном поле [16]:

$$P_{KA} = \frac{3m}{2r^3} (I_x - I_y) \cos^2 a. \quad (12)$$

Очевидно, что потенциальная энергия тросовой системы и КА как твёрдого тела определяется суммой двух потенциальных энергий (11) и (12):

$$\begin{aligned} P &= P_{TC} + P_{KA} = \\ &= -\frac{mm}{r} + \frac{mm_* l^2}{2r^3} (1 - 3\cos^2 j) + \\ &+ \frac{3m}{2r^3} (I_x - I_y) \cos^2 a. \end{aligned} \quad (13)$$

Уравнения движения

Для рассматриваемой механической системы определим с помощью (10) и (13) лагранжиан как

$$\begin{aligned} L &= T - P = \\ &= \frac{1}{2} \left[m(\dot{\mathcal{R}} + r^2 \dot{\mathcal{J}}) + m_1(l)\dot{\mathcal{R}} + m_*(l)l^2(\dot{\mathcal{J}} + \dot{\mathcal{J}}_0)^2 + I_z(\dot{\mathcal{J}} + \dot{\mathcal{J}}_0 + \dot{\mathcal{A}})^2 \right] + \\ &+ \frac{mm}{r} - \frac{mm_* l^2}{2r^3} (1 - 3\cos^2 j) - \frac{3m}{2r^3} (I_x - I_y) \cos^2 a. \end{aligned} \quad (14)$$

Тогда уравнение Лагранжа второго рода примет вид [14]

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = \overline{1, 5}, \quad (15)$$

$$(q_1 = r, q_2 = l, q_3 = J, q_4 = j, q_5 = a),$$

где Q_j - непотенциальные силы.

Пусть расстояние от центра планеты до центра масс системы значительно больше длины троса и соответствующего радиуса инерции КА: $i_z = \sqrt{I_z / m_1}$. Тогда можно утверждать, что выполняется следующее условие:

$$mr^2 \gg m_* l^2, I_z. \quad (16)$$

Отметим, что лагранжиан системы (14) не зависит от угла истинной аномалии J , который является циклической координатой. В этом случае уравнения Лагранжа второго рода (15) отвечают четыре дифференциальных уравнения движения второго порядка:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = r \dot{\mathcal{J}} - \frac{m}{r^2} + \frac{3m\bar{m}_* l^2}{2r^4} (1 - 3\cos^2 j) + \\ + \frac{9m}{2mr^4} (I_x - I_y) \cos^2 a, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J} = 2 \frac{\dot{\mathcal{J}}}{r} \frac{d(m_* l^2)}{dt} \frac{(j\dot{\mathcal{J}} + \dot{\mathcal{J}})}{(1 + \bar{I}_z) m_* l^2} - \\ - \frac{1}{\bar{I}_z^{-1} + 1} \left(\frac{\dot{\mathcal{J}}}{r} - \frac{3m}{(1 + \bar{I}_z) r^3} \sin j \cos j \right), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \frac{3m}{r^3} \frac{I_x - I_y}{I_z} \sin a \cos a - \\ - (j\dot{\mathcal{J}}) - \frac{P\Delta}{I_z} \sin(a - j) + 2 \frac{\dot{\mathcal{J}}}{r}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \frac{1}{m_1} \times \\ \times \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\partial m_1}{\partial l} \dot{\mathcal{J}} + \left(\frac{\partial m_*}{\partial l} l^2 + 2m_* l \right) \left[(j\dot{\mathcal{J}} + \dot{\mathcal{J}})^2 - \frac{m}{r^3} (1 - 3\cos^2 j) \right] - P \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

и один первый интеграл

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathcal{J}}} = mr^2 \dot{\mathcal{J}} + m_*(l) l^2 (j\dot{\mathcal{J}} + \dot{\mathcal{J}}) + I_z (j\dot{\mathcal{J}} + \dot{\mathcal{J}}) = const,$$

где $\bar{m}_*(l) = \frac{m_*(l)}{m}$, $\bar{I}_z = \frac{I_z}{m_* l^2}$, $\Delta = O_1 A$; $P = P(t)$

- сила натяжения троса, используемая, как правило, в качестве управления при развёртывании тросовых систем [8]. Уравнения (17)-(20) получены с учётом условия (16).

Исключим из правых частей уравнений (18) и (19) вторые производные и в результате представим систему уравнений движения

КА с тросовой системой, разрешённую относительно вторых производных:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = r \dot{\mathcal{J}} - \frac{m}{r^2} + \frac{3m\bar{m}_* l^2}{2r^4} (1 - 3\cos^2 j) + \\ + \frac{9m}{2mr^4} (I_x - I_y) \cos^2 a, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J} = 2 \frac{\dot{\mathcal{J}}}{r} \frac{d(m_* l^2)}{dt} (j\dot{\mathcal{J}} + \dot{\mathcal{J}}) - \\ - \frac{3m}{r^3} \left(\sin j \cos j + \frac{I_x - I_y}{m_* l^2} \sin a \cos a \right) + \\ + \frac{P\Delta}{m_* l^2} \sin(a - j), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \frac{3m}{r^3} (I_x - I_y) \left(\frac{1}{I_z} + \frac{1}{m_* l^2} \right) \sin a \cos a - \\ - P\Delta \left(\frac{1}{I_z} + \frac{1}{m_* l^2} \right) \sin(a - j) + \end{aligned} \quad (21)$$

$$+ \frac{1}{m_* l^2} \frac{d(m_* l^2)}{dt} (j\dot{\mathcal{J}} + \dot{\mathcal{J}}) + \frac{3m}{r^3} (\sin j \cos j),$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \frac{1}{m_1} \times \\ \times \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\partial m_1}{\partial l} \dot{\mathcal{J}} + \left(\frac{\partial m_*}{\partial l} l^2 + 2m_* l \right) \left[(j\dot{\mathcal{J}} + \dot{\mathcal{J}})^2 - \frac{m}{r^3} (1 - 3\cos^2 j) \right] - P \right\}. \end{aligned}$$

Если центр масс системы движется по круговой орбите ($r = const$), то уравнения движения (21) можно записать в более простом виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{J} = -\frac{1}{m_*} \frac{d(m_* \bar{l}^2)}{dt} (j\dot{\mathcal{J}} + \dot{\mathcal{J}}) - \\ - \frac{3m}{r^3} \left[\sin j \cos j + (\bar{I}_x - \bar{I}_y) \sin a \cos a \right] + \\ + N \sin(a - j), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \left[\frac{3m}{r^3} (\bar{I}_x - \bar{I}_y) \sin a \cos a - N \sin(a - j) \right] (\bar{I}_z^{-1} + 1) + \\ + \frac{1}{m_*} \frac{d(m_* \bar{l}^2)}{dt} (j\dot{\mathcal{J}} + \dot{\mathcal{J}}) + \frac{3m}{r^3} (\sin j \cos j), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{1}{m_i} \times \\ \times \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\partial m_i}{\partial \bar{l}} \dot{\mathbf{r}} + \left(\frac{\partial m_i}{\partial \bar{l}} \bar{l}^2 + 2m_i \bar{l} \right) [(\dot{\mathbf{r}}_x + \dot{\mathbf{r}}_y)^2 - \frac{m}{r^3} (1 - 3\cos^2 j)] - P \right\},$$

где $N = \frac{P\Delta}{m_* l^2}$; $\bar{l} = \frac{l}{r}$ - безразмерная длина

троса; $\bar{I}_x = \frac{I_x}{m_* l^2}$, $\bar{I}_y = \frac{I_y}{m_* l^2}$ - безразмерные моменты инерции.

Уравнения движения (21) и (22) обобщают известные математические модели, например [9, 12, 15], и позволяют проводить исследование движения космической тросовой системы с учётом поведения КА, троса и конечного груза.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (06-01-00355).

Библиографический список

1. Белецкий, В. В. Динамика космических тросовых систем [Текст]/В. В. Белецкий. - М.: Наука, 1990. - 329 с.
2. Черноусько, Ф. Л. Динамика свертывания космической тросовой системы [Текст]/Ф. Л. Черноусько//Прикладная математика и механика. - 1995. - Т. 59. Вып. 2. - С. 179-187.
3. Алпатов, А. П. Космические тросовые системы. Обзор проблемы [Текст]/А. П. Алпатов, В. И. Драновский, А. Е. Закржевский, А. В. Пироженко, В. С. Хорошилов//Укр. космическая наука и технология. - 1997. - Т. 3. Вып. 5 /6. - С. 21-29.
4. Дигнат, Ф. Управление колебаниями орбитальной тросовой системы [Текст]/Ф. Дигнат, В. Шилен//Прикладная математика и механика.-2000. - Т. 64. Вып. 5. - С. 747-754.
5. Сидоров, И. М. Об использовании тросовых систем для создания постоянно действующего транспортного канала в космическом пространстве [Текст]/И. М. Сидоров//Полет. - 2000. - №8. - С. 36-39.
6. Сидоров, И. М. Принципиальная возможность использования тросовых систем для реализации гравитационных маневров в окрестности планеты [Текст]/И. М. Сидоров/

/Докл. Российской академии наук. - 2002. - Т. 384. №4. - С. 483-488.

7. Иванов, В. А. Космические тросовые системы. Некоторые аспекты практического использования [Текст]/В. А. Иванов, С. А. Купреев, М. Р. Либерзон. - М.: СИП РИА, 2005. - 100 с.
8. Zimmermann, F. Optimization of the tether-assisted return mission of a guided re-entry capsule [Текст]/F. Zimmermann, U. M. Schuttle, E. Messerschmid//Aerospace Science and Technology. - 2005. - V. 9. №8. - P. 713-721.
9. Williams, P. Libration In-plane payload capture using tethers [Текст]/P. Williams, C. Blanksby, P. Trivailo, H.A. Fujii//Acta Astronautica. - 2005. - V. 57. - P. 772-787.
10. Сазонов, В. В. Математическое моделирование развертывания тросовой системы с учетом массы троса. Препр [Текст]/В. В. Сазонов//Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН. - 2006. - № 58. - С. 1-36.
11. Асланов, В. С. Пространственное движение космической тросовой системы, предназначенной для доставки груза на Землю [Текст]/В. С. Асланов, А. С. Ледков, Н. Р. Стратилатов//Полет. - 2007. - № 2. - С. 28-33.
12. Асланов, В. С. Колебания тела с орбитальной тросовой системой [Текст]/В. С. Асланов//Прикладная математика и механика. - 2007. - Т. 71. Вып. 6. - С. 1027-1033.
13. Асланов, В. С. Анализ движения космического аппарата с тросовой системой с учетом работы двигателей ориентации [Текст]/В. С. Асланов, Н. Р. Стратилатов//Сборник трудов XIII Всероссийского научно-технического семинара по управлению движением и навигации летательных аппаратов. Самара. - 2007. - С. 48-53.
14. Суслов, Г. К. Теоретическая механика [Текст]/Г. К. Суслов. - М.; Л.: Гостехиздат, 1946. - 655 с.
15. Williams, P. Tethered planetary capture: controlled maneuvers [Текст]/P. Williams, C. Blanksby, P. Trivailo//Acta Astronautica. - 2003. - V. 53 - P. 681-708.
16. Белецкий, В. В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле [Текст]/В. В. Белецкий. - М.: Изд. МГУ, 1975. - 308 с.

Информация об авторах

Асланов Владимир Степанович, заведующий кафедрой теоретической механики СГАУ, д.т.н, профессор. Область научных интересов: динамика движения космических аппаратов и соосных тел, космические тросовые системы.

Стратилатов Николай Ремирович, главный конструктор-начальник отделения ГНПРКЦ «ЦСКБ-Прогресс», Государственный научно-производственный ракетно-космический центр «ЦСКБ-Прогресс». Область научных интересов: динамика орбитальных тросовых систем, орбитальное движение космического аппарата.