

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ С НЕСКВОЗНЫМ РАЗРЕЗОМ-ТРЕЩИНОЙ ПРИ ЛОКАЛИЗАЦИИ ДЕФОРМАЦИЙ ПО СХЕМАМ ЖЁСТКОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ

© 2008 С. Л. Степанов

Самарский государственный аэрокосмический университет

Формулируется упругопластическая задача о растяжении тонкой пластины с несквозным (поверхностным) разрезом. Процесс пластического деформирования материала как на всей длине разреза, так и в пластических зонах у его вершин моделируется по схемам жёсткопластического течения, что позволяет учитывать изменение геометрии пластины по толщине вблизи несквозного разреза и на его длине. Получено решение интегрального уравнения Фредгольма в квадратурах и построена процедура для определения численных результатов. В явном виде определена зависимость раскрытия берегов разреза от толщины пластины и глубины. Раскрытие берегов разреза используется в качестве деформационного критерия разрушения.

Разрез-трещина, пластическая деформация, упругопластическая задача, объёмная плотность, энергия диссипации, критерий разрушения, интегральное уравнение.

В настоящее время значительный интерес представляют задачи механики разрушения для образцов и элементов конструкций, находящихся в плоском напряжённом состоянии, с различными дефектами, возле которых возникают соизмеримые с ними по размерам области больших пластических деформаций. Это связано с широким использованием в тонкостенных конструкциях и оболочках летательных аппаратов материалов, обладающих хорошими деформационными свойствами и достаточно высокой пластичностью, а также с высоким уровнем эксплуатационных нагрузок.

С другой стороны, задача о разрушении пластины из упругопластического материала, находящейся в плоском напряжённом состоянии и имеющей несквозной трещиновидный дефект, имеет более общий характер и представляет больший практический интерес, чем задача о сквозной трещине. Это объясняется тем, что в тонкостенных конструкциях и оболочках, будь то фюзеляж самолёта или топливные баки ракет, всегда существуют повреждения, имеющие технологический характер или возникающие в результате внешних воздействий, и в процессе эксплуатации трансформирующиеся в царапины. В свою очередь, в зависимости от уровня внешних нагрузок такие царапины могут

как прорасти в сквозные трещины, так и сразу вызвать разрушение конструкции. Определение соответствующих предельных состояний в постановке Дагдейла рассмотрено в работе [1].

В настоящей работе, в отличие от [1], краевые условия для задачи о растяжении тонкой упругопластической пластины с несквозным разрезом-трещиной формулируются на основании представления процесса деформирования материала по толщине на длине этого разреза и в пластических зонах по схемам жёсткопластического течения. На длине царапины $2l$ деформирование материала происходит по схеме несимметричного жёсткопластического течения, рассмотренного в [2] и приведённого на рис. 1. Здесь h – толщина пластины, a – глубина несквозной трещины, v – скорость смещения верхнего и нижнего концов пластины, u – скорость прорастания несквозного разреза-трещины в глубину (движение т. О к т. О').

Область $A'O'B'$ движется как жёсткое целое по направлению к т. О со скоростью v . Пластические деформации локализуются вдоль изолированных линий скольжения $A'O'$ и $B'O'$, которые являются линиями разрыва скоростей перемещений. При пересечении этих линий частицами материала происходит скачкообразное увеличение деформаций и их

локализация в заштрихованных областях.

Мерой этих деформаций можно выбрать первое главное значение тензора конечных деформаций Альманси E_1 или, согласно [2], эквивалентный энергетический критерий, использующий имеющую физический смысл величину объёмной плотности энергии диссипации W , получаемой материальной частицей при пересечении линии разрыва скоростей перемещений:

$$\max W \geq W_* . \quad (1)$$

Тогда скорость прорастания несквозного разреза-трещины определится следующим образом:

$$u = v \left(\frac{2}{\bar{W}_*} - 1 \right), \quad (2)$$

где \bar{W}_* – критическое значение относительной объёмной плотности энергии диссипации $\bar{W}_* = W_* / k$, k – предел текучести материала на сдвиг, v – смещение берегов несквозной трещины в единицу времени.

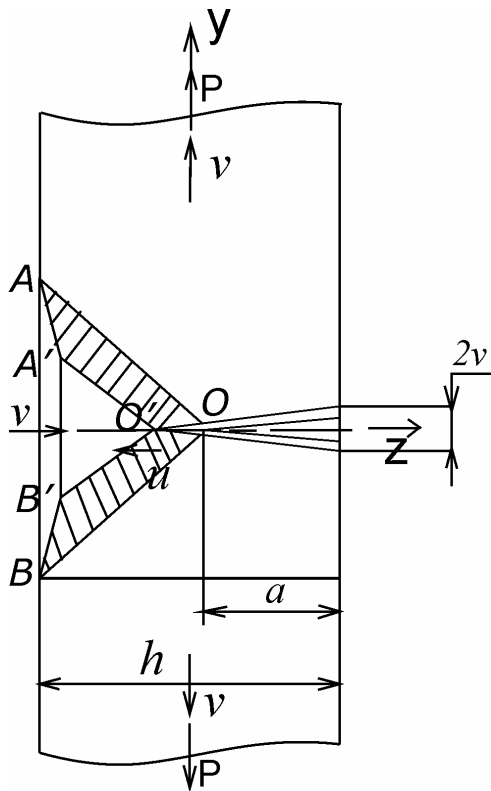


Рис. 1. Схема несимметричного жёсткопластического течения

Несквозной разрез прорастает на всю глубину при $v + u = h - a$, когда т. О выйдет на тыльную поверхность $A'B'$. Составив уравнение равновесия для полосы с учётом (2), получим

$$P \cdot h = 2k (h - a - v - u) = s_s \left(h - a - \frac{2v}{\bar{W}_*} \right), \quad (3)$$

где P – усилие, растягивающее полосу; s_s – предел текучести.

На рис. 2 представлена схема симметричного жёсткопластического течения, моделирующая деформирование материала пластины в пластических зонах у вершин несквозной трещины. Процесс деформирования происходит аналогично рассмотренному выше, но в отличие от последнего внутренняя трещина $O'O''$, вершины которой движутся в разные стороны со скоростью u , выйдет на свободные поверхности $A'B'$ и $C'D'$ при $v + u = h/2$. Уравнение равновесия для симметричного течения выглядит следующим образом:

$$P \cdot h = 2k (h - 2u - 2v) = s_s \left(h - \frac{4v}{\bar{W}_*} \right). \quad (4)$$

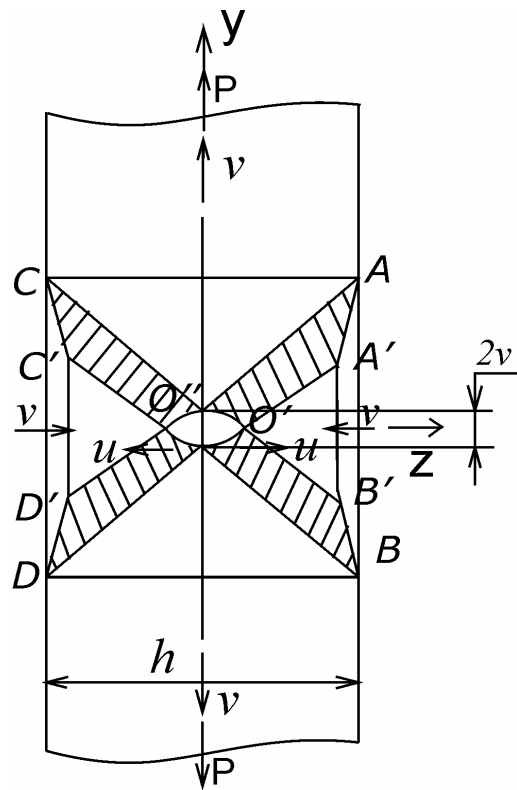


Рис. 2. Схема симметричного жёсткопластического течения

Полученные уравнения используем в качестве граничных условий для задачи о бесконечной пластине толщиной h с центральным несквозным разрезом глубиной a и длиной $2l$, растягиваемым на бесконечности усилиями P (рис. 3; сечению А-А соответствует рис. 1; смещению В-В соответствует рис. 2).

На линии несквозного разреза реализуется несимметричное жёсткопластическое течение. Тогда, используя (3), получим выражение для определения $p_1(x)$:

$$p_1(x) = s_s \left(1 - \frac{a}{h} - \frac{2v(x)}{\bar{W}_* \cdot h} \right). \quad (5)$$

В пластических зонах при $l \leq |x| \leq c$ действуют сжимающие усилия $p_2(x)$:

$$p_2(x) = s_s \left(1 - \frac{4v(x)}{\bar{W}_* \cdot h} \right). \quad (6)$$

Решение упругой задачи с граничными условиями (5) и (6) будем искать путём суперпозиции двух решений, первое из которых – для однородного растяжения пластины без несквозного разреза, второе – для раз-

реза с приложенными на его берегах напряжениями, исчезающими на бесконечности. Поскольку первое решение не даёт вклада в концентрацию напряжений, рассмотрим только второе состояние, для которого на основании (5) и (6) запишем следующие граничные условия:

$$p(x) = \begin{cases} -P + s_s \left(1 - \frac{a}{h} - \frac{2v(x)}{\bar{W}_* \cdot h} \right) & |x| \leq l; \\ -P + s_s \left(1 - \frac{4v(x)}{\bar{W}_* \cdot h} \right) & l \leq |x| \leq c; \\ v(x) = 0, & |x| \geq c. \end{cases} \quad (7)$$

где $v(x)$ – смещения берегов разреза.

Исходя из физического смысла задачи, на величину P следует наложить следующие ограничения:

1) поскольку рассматривается идеальный упругопластический материал, то $P \leq s_s$;

2) берега несквозного разреза не должны контактировать и тем более перекрывать друг друга. Поэтому $P \geq s_s \left(1 - \frac{a}{h} \right)$.

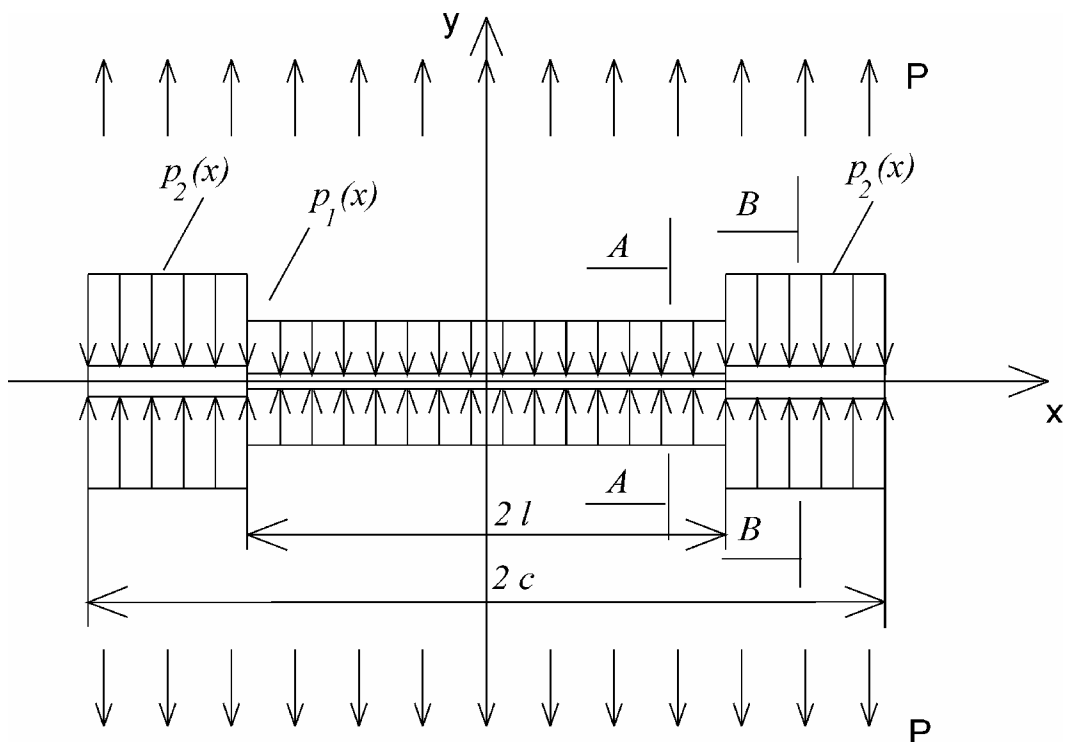


Рис. 3. Граничные условия для несквозного разреза

В полученной задаче (7) на оси x касательные напряжения S_{xy} равны нулю. В этом случае перемещения и напряжения могут быть выражены через одну аналитическую функцию комплексного переменного по формулам Колосова-Мусхелишвили. Не останавливаясь на подробностях ее отыскания (см., например, [3], [4]), сразу выпишем решение в наиболее удобном для дальнейшего исследования виде:

$$v(x) = \frac{1}{pE} \int_{-c}^c p(x) \Gamma(c, x, x) dx, \quad |x| \leq c;$$

$$s(x) = \frac{1}{2p \sqrt{x^2 - c^2}} \int_{-c}^c \frac{p(x) \sqrt{c^2 - x^2}}{x - x} dx, \quad |x| \geq c.$$
(8)

Подставив граничные условия (7) в первое уравнение (8) и проведя некоторые преобразования, получим неоднородное уравнение Фредгольма второго рода относительно смещений берегов разреза $v(x)$:

$$v(x) - I \frac{2}{h} \left[\int_{-c}^c v(x) \Gamma(c, x, x) dx + \left(\int_{-c}^{-l} + \int_l^c \right) v(x) \Gamma(c, x, x) dx \right] = f(x).$$
(9)

Здесь

$$\Gamma(c, x, x) = \ln \frac{c^2 - xx + \sqrt{(c^2 - x^2)(c^2 - x^2)}}{c^2 - xx - \sqrt{(c^2 - x^2)(c^2 - x^2)}};$$

$$f(x) = \frac{S_s}{pE} \left\{ \left(1 - \frac{P}{S_s} \right) \int_{-c}^c \Gamma(c, x, x) dx - \frac{a}{h} \int_{-l}^l \Gamma(c, x, x) dx \right\};$$

$$I = \frac{S_s}{p \bar{W}_* \cdot E},$$
(10)

где E – модуль упругости.

К уравнению (9) для определения величины « c » необходимо присоединить условие плавности смыкания берегов пластических зон или эквивалентное условие конечности напряжений:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{dv(x)}{dx} = 0.$$
(11)

Полученное интегральное уравнение (9) с ядром, имеющим логарифмическую особенность, согласно первой теореме Фредгольма имеет решение при любой правой части $f(x)$, поскольку соответствующее однородное уравнение не имеет решений, отличных от тривиального нулевого. Действительно, равенство нулю правой части в (9) означает отсутствие внешних сил, действующих на контур разреза, что сразу же позволяет сделать вывод о справедливости тождества: $v(x) \equiv 0$.

Таким образом, согласно теории интегральных уравнений решение (9) можно представить в виде ряда:

$$v(x) = v_0(x) + I v_1(x) + I^2 v_2(x) + \dots,$$
(12)

который будет сходящимся при достаточно малом I .

Сделаем оценку величины этого параметра согласно (10). Для большинства металлов справедлива оценка: $0,001 \leq S_s / E \leq 0,01$, причём нижняя граница соответствует пластичным материалам, верхняя – более хрупким. В свою очередь, имеющиеся экспериментальные значения \bar{W}_* [2] находятся в пределах: $0,3 \leq \bar{W}_* \leq 1,6$. Комбинируя приведённые оценки, получим средневзвешенное значение I для основных конструкционных материалов: $I_{cp} \cong 0,003$.

Полученный порядок малости величины I позволяет говорить о сходимости ряда (12) и, следовательно, о возможности решения уравнения (9) в виде (12). Детальное исследование сходимости этого решения выходит за рамки настоящей работы. Однако следует отметить, что точным условиям сходимости является нормируемость ядра:

$$\int_{-c}^c |G(c, x, x)|^2 dx \leq A,$$

которая доказывается непосредственным интегрированием. Здесь A – ограниченная величина.

Подставив ряд (12) в уравнение (9) и приравняв выражения при одинаковых степенях I , получим рекуррентные соотношения

$$v_i(x) = \frac{2}{h} \left[\int_{-c_{i-1}}^{c_{i-1}} v_{i-1}(x) G(c, x, x) dx + \left(\int_{-c_{i-1}}^{-l} + \int_l^{c_{i-1}} \right) v_{i-1}(x) G(c, x, x) dx \right];$$

$$v_0(x) = f(x), \quad |x| \leq c_{i-1}; \quad i = 1, 2, \dots$$

(13)

Для определения величины «с» представим её в виде числового ряда:

$$c_i = \sum_0^i I^m \bar{c}_m, \quad (14)$$

в котором слагаемые \bar{c}_m определяются в результате решения последовательности уравнений, аналогичных (11):

$$\frac{d v_m(\bar{c}_m)}{dx} = 0. \quad (15)$$

Таким образом, процедура нахождения решения уравнения (9) представляет собой циклический процесс, который проводится по следующему алгоритму.

1. Определяется функция $v_0(x)$ по формулам (10) и (13), $i = 0$.

2. Решается уравнение (15) и определяется \bar{c}_0 .

3. По формуле (13) определяется $v_1(x)$, $i = 1$.

4. Решается уравнение (15) и определяется \bar{c}_1 .

5. По формуле (14) определяется c_1 .

Далее процесс повторяется для $i = 2$ с пункта 3. Процедура может быть закончена при любом выбранном значении $i = n$.

Тогда решение уравнения (9) запишется следующим образом:

$$v(x) = v_0(x) + I v_1(x) + \dots + I^n v_n(x). \quad (16)$$

Здесь $v_i(x)$ определяются из уравнения

(13), в котором, в свою очередь, величины c_{i-1} вычисляются по уравнениям (14) и (15).

Напряжения $s(x)$ определяются на контуре разреза и в пластических зонах непосредственно из граничных условий (7), а при $x \geq c$ – по формуле (8).

Априорный анализ полученных результатов даёт возможность сделать следующие выводы.

1. Моделирование деформаций у несквозного разреза-трещины по схемам жёсткопластического течения позволило учесть изменение геометрии свободных поверхностей в областях пластических деформаций, а также установить механический и физический смысл раскрытия берегов разреза-трещины как критерия разрушения.

2. Получено решение рассматриваемой упругопластической задачи в квадратурах и разработан алгоритм получения численных результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта РФФИ 08-08-99042.

Библиографический список

1. Степанов, С. Л., Варганов, А. А. Исследование предельного состояния пластин с несквозными трещинами переменной глубины в плоском напряжённом состоянии. // Труды Третьей Всероссийской научной конференции: Математическое моделирование и краевые задачи. Ч.1. - Самара: СамГТУ, 2006. - С. 216-221.

2. Хромов, А. И. Деформация и разрушение жесткопластических тел. / А И. Хромов. - Владивосток: Дальнаука, 1996. - 181 с.

3. Слепьян, Л. И. Механика трещин. / Л. И. Слепьян. - Ленинград: Судостроение, 1981. - 295 с.

4. Панасюк, В. В. Распределение напряжений около трещины в пластинах и оболочках. / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дачшин. - Киев: Наукова думка, 1976. - 442 с.

Информация об авторе

Степанов Сергей Львович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры летательных аппаратов. Область научных интересов: пластичность, деформация, разрушение, прочность