

ИЗГИБ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ КОНСОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ С УЧЁТОМ ДЕФОРМАЦИИ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА

© 2008 М. В. Сухотерин

Санкт–Петербургский государственный университет водных коммуникаций

Предложен итерационный метод суперпозиции исправляющих функций для начального приближения в виде гиперболо-тригонометрических рядов по двум координатам, которые по мере наложения взаимно компенсируют порождаемые ими невязки в граничных условиях. Невязки убывают с ростом числа итераций, и решение можно получить с любой степенью точности. Приведены численные результаты расчетов прогибов и изгибающих моментов консольной пластины Рейсснера под действием равномерной нагрузки. Дается сравнение с классической теорией.

Прямоугольная консольная пластина Рейсснера, изгиб, итерационный метод, ряды Фурье, точное решение

Уточнённая теория пластин Э. Рейсснера [1], в отличие от классической (теории Кирхгоффа) [2], учитывает влияние деформации поперечного сдвига на изгиб. Это влияние может заметно сказываться на напряженном состоянии вблизи контура пластины и точек приложения сосредоточенных сил, а также на величине прогиба.

Проблема изгиба прямоугольной консольной пластинки Рейсснера является наименее изученной вследствие сложности краевой задачи. Какие-либо результаты её решения неизвестны.

Цель работы – построение итерационного процесса, реализация которого на ЭВМ позволяет получить решение задачи с любой точностью, а также сравнение численных результатов уточнённой теории и классической.

За основу принят метод суперпозиции, высказанный в [2] и реализованный на конкретных задачах в работах [3,4,5]. В данной задаче поочередно накладываются две функции прогибов и напряжений, которые в ходе итерационного процесса взаимно компенсируют порождаемые ими невязки в исходных граничных условиях. При этом все невязки уменьшаются, и решение приближается к точному решению задачи.

Рассмотрим прямоугольную консольную пластинку $-\gamma/2 \leq x \leq \gamma/2$, $0 \leq y \leq 1$ (край $y = 0$ защемлён, остальные – свободные) постоянной толщины h , нагруженную по повер-

хности $z = h/2$ равномерно распределённой поперечной нагрузкой интенсивности q .

Задача изгиба такой пластинки, согласно Э. Рейсснеру [2], описывается двумя фундаментальными уравнениями

$$\nabla^2 \nabla^2 w = -1, \quad y - a \nabla^2 y = 0 \quad (1)$$

и граничными условиями

$$w = 0, \quad j_x = 0, \quad j_y = 0 \quad \text{на грани } y = 0; \quad (2)$$

$$M_y = 0, \quad Q_y = 0, \quad H_{xy} = 0 \quad \text{на грани } y = 1; \quad (3)$$

$$M_x = 0, \quad Q_x = 0, \quad H_{xy} = 0 \quad \text{на гранях } x = \pm\gamma/2. \quad (4)$$

Здесь координаты точек пластины отнесены к размеру b пластины; прогиб $w(x,y)$ отнесён к величине qb^4/D ; функция напряжений $y(x,y)$ – к величине qb^2 ; D – цилиндрическая жесткость; $\gamma = a/b$; a – размер пластины по оси x ; $a = h^2/10$; ∇^2 – двумерный оператор Лапласа; углы поворота элементов j_x, j_y , моменты M_x, M_y, H_{xy} и перерезывающие силы Q_x, Q_y определяются формулами

$$j_x = (w + a_1 \nabla^2 w)'_x - a_1 y'_x,$$

$$j_y = (w + a_1 \nabla^2 w)'_y + a_1 y'_y,$$

$$M_x = -(w''_{xx} + n w''_{yy} + a_2 (\nabla^2 w)''_{xx}) + a_2 y''_{xy} + a_3,$$

$$M_y = -(w''_{yy} + n w''_{xx} + a_2 (\nabla^2 w)''_{yy}) - a_2 y''_{xy} + a_3, \quad + L_{sn} ch x_s (y-1) \sin m_s x. \quad (12)$$

$$Q_x = -(\nabla^2 w)'_x + y'_y, \quad Q_y = -(\nabla^2 w)'_y - y'_x,$$

$$H_{xy} = (1-n) w''_{xy} + a_2 (\nabla^2 w)''_{xy} - a (y''_{yy} - y''_{xx}), \quad (5)$$

где n – коэффициент Пуассона, $\alpha_1 = \frac{2}{1-\nu} \alpha$,

$$a_2 = 2a, \quad a_3 = \frac{n}{1-n} a.$$

Прогиб пластины w и функцию напряжений u разыскиваем в следующем виде:

$$w(x, y) = w_0(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} [w_{1n}(x, y) + w_{2n}(x, y)]. \quad (6)$$

$$y(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [y_{1n}(x, y) + y_{2n}(x, y)], \quad (7)$$

где

$$w_0(x, y) = -\frac{1}{24} [y^4 - 4y^3 + 6(1-2a_4)y^2 + 24a_1y] \quad (8)$$

есть частное решение первого уравнения (1);

$$w_{1n} = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (A_{kn} ch I_k x + B_{kn} x sh I_k x) \frac{\sin I_k y}{ch I_k^*}, \quad (9)$$

$$w_{2n} = -P_n y + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{ch m_s} [C_{sn} sh m_s (y-1) + D_{sn} ch m_s (y-1) + (y-1)(E_{sn} ch m_s (y-1) + F_{sn} sh m_s (y-1))] \cos m_s x, \quad (10)$$

$$y_{1n} = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} G_{kn} \frac{sh b_k x}{sh b_k^*} \cos I_k y, \quad (11)$$

$$y_{2n} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{sh x_s} [R_{sn} sh x_s (y-1) +$$

Здесь

$$A_{kn}, B_{kn}, P_n, C_{sn}, D_{sn}, E_{sn}, F_{sn}, G_{kn}, R_{sn}, L_{sn}$$

– неопределённые коэффициенты; $I_k = \frac{kp}{2}$,

$$m_s = \frac{2ps}{g}, \quad b_k = \sqrt{1/a + I_k^2}, \quad x_s = \sqrt{1/a + m_s^2},$$

$$a_4 = a_2 + a_3, \quad I_k^* = I_k g / 2, \quad b_k^* = b_k g / 2.$$

Функции w_{1n} , w_{2n} являются бигармоническими; функции y_{1n} , y_{2n} удовлетворяют второму уравнению (1). Функции w_{1n} , y_{1n} «автоматически» удовлетворяют первым двум граничным условиям (2) и последним двум условиям (3); функции w_{2n} , y_{2n} – последним двум условиям (4).

Начальный компонент w_0 (8) удовлетворяет всем граничным условиям, кроме первого условия (4). Невязка по изгибающему моменту от w_0 после разложения в ряд Фурье по синусам

$$M_{x_0} \Big|_{x=\frac{g}{2}} = n \left[\frac{(y-1)^2}{2} - a \right] = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} b_{k_0} \sin I_k y, \quad (13)$$

где

$$b_{k_0} = \frac{n}{I_k} \left(1 - \frac{2}{I_k^2} - a_2 \right), \quad (14)$$

используется для определения коэффициентов рядов (9), (11) при удовлетворении граничным условиям (4). Коэффициенты этих рядов примут вид:

$$B_{k1} = \frac{b_{k_0} / I_k}{3+n - (1-n) \frac{2I_k^*}{sh 2I_k^*} + 4a I_k (I_k - b_k \frac{th I_k^*}{th b_k^*})},$$

$$A_{k1} = \frac{1}{I_k} \left(\frac{1+n}{1-n} - I_k^* cth I_k^* \right) B_{k1}, \quad (15)$$

$$G_{k1} = -2I_k th I_k^* B_{k1}.$$

Невязки выполнения граничных условий на краях $y = const$ от компонентов w_{11}

и y_{11} после разложения в ряд Фурье по косинусам (и перестановки знаков суммирования)

$$j_y|_{y=0} = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} [A_{k1} I_k \frac{chl_k x}{chl_k^*} + \frac{B_{k1}}{chl_k^*} (I_k x sh l_k x + 2a_1 I_k^2 chl_k x) + G_{k1} a_1 b_k \frac{ch b_k x}{sh b_k^*}] =$$

$$= P_1 + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s a_{s1} \cos m_s x,$$

$$M_y|_{y=1} = - \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\tilde{k}} I_k \{ (1-n) A_{k1} I_k \frac{chl_k x}{chl_k^*} + \frac{B_{k1}}{chl_k^*} [(1-n) I_k x sh l_k x + 2(a_2 I_k^2 - n) chl_k x] + G_{k1} a_2 b_k \frac{ch b_k x}{sh b_k^*} \} = \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s t_{s1} \cos m_s x,$$

где

$$P_1 = \frac{4n/g}{(1-n)} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{B_{k1} th l_k^*}{I_k}, \quad \tilde{k} = \frac{k+1}{2},$$

$$a_{s1} = \frac{8/g}{(1-n)} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \left(\frac{m_s^2 + n I_k^2}{I_k^2 + m_s^2} - \frac{2m_s^2}{b_k^2 + m_s^2} \right) \frac{I_k B_{k1} th l_k^*}{I_k^2 + m_s^2},$$

$$t_{s1} = \frac{8m_s^2}{g} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\tilde{k}} \left(\frac{2}{b_k^2 + m_s^2} - \frac{1-n}{I_k^2 + m_s^2} \right) \frac{I_k^2 B_{k1} th l_k^*}{I_k^2 + m_s^2},$$

используются для определения коэффициентов C_{s1} , D_{s1} , E_{s1} , F_{s1} , R_{s1} , L_{s1} функций w_{21} (10) и y_{21} (12) при удовлетворении граничным условиям (2), (3).

Эти коэффициенты имеют вид:

$$C_{s1} = \frac{1+n}{m_s d_s} \{ [1 + (\frac{1}{2m_s} + \frac{2am_s^2}{1-n} e_s) sh 2m_s] t_{s1} + [h_s sh m_s + 4am_s^2 t_s ch m_s] a_{s1} \} ch m_s,$$

$$D_{s1} = \frac{1+n}{m_s d_s} \left(\left\{ \frac{sh^2 m_s}{m_s} + \frac{1-n}{1+n} m_s + \frac{4am_s^2}{1-n} [e_s sh^2 m_s + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{1-n}{1+n} \left(\frac{sh m_s}{sh x_s} - \frac{m_s}{x_s} \right) \right\} t_{s1} + \{ -2s_s + 4am_s^2 \times \right.$$

$$\left. \left. \times [t_s (1 + \frac{1-n}{1+n} \frac{2m_s}{sh 2m_s}) + \frac{1-n}{1+n} q_s] \right\} sh m_s \cdot a_{s1} \right) ch m_s,$$

$$E_{s1} = \frac{1-n}{1+n} m_s C_{s1}, \quad F_{s1} = s_s C_{s1} - D_{s1} cth m_s,$$

$$R_{s1} = \frac{1}{2ax_s} \left\{ \frac{ch m_s}{m_s} t_{s1} - (h_s - 4am_s^2 cth m_s) D_{s1} - \right.$$

$$\left. - 2(1 + 2am_s^2) s_s C_{s1} \right\} \frac{sh x_s}{ch m_s},$$

$$L_{s1} = -2 \frac{1-n}{1+n} m_s^2 \frac{sh x_s}{ch m_s} C_{s1},$$

где

$$d_s = (3+n)(1-n) sh^2 m_s + (1-n)^2 m_s^2 + 4 -$$

$$- 16am_s^2 \left[\left\{ \left(\frac{3+n}{4} \frac{m_s}{x_s} + \frac{1-n}{4} \frac{x_s}{m_s} \right) \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \times th x_s cth m_s - 1 + am_s^2 (g_s cth m_s - 2) \right\} sh^2 m_s + \right.$$

$$\left. + (1 + 2am_s^2) t_s + \frac{1-n}{4} m_s (g_s - 2 \frac{sh m_s}{ch x_s}) \right],$$

$$e_s = \left(\frac{1}{m_s} - \frac{1}{x_s} th x_s cth m_s \right), \quad h_s = (1-n) m_s - 2 cth m_s,$$

$$t_s = \frac{ch m_s}{ch x_s} - 1, \quad q_s = x_s th x_s - m_s th m_s,$$

$$s_s = 1 + \frac{1-n}{1+n} m_s cth m_s, \quad g_s = \left(\frac{m_s}{x_s} + \frac{x_s}{m_s} \right) th x_s.$$

После функций w_{21} и y_{21} , так же, как и после w_0 , остается невязка по изгибающему моменту на кромках $x = const$:

$$M_x|_{x=\frac{g}{2}} = \sum_{s=1}^{\infty} m_s \{ [(1-n) m_s C_{s1} + p_s E_{s1}] \frac{sh m_s (y-1)}{ch m_s} +$$

$$+ \frac{1}{chm_s} ((1-n)m_s D_{s1} + p_s F_{s1}) chm_s (y-1) + (1-n) \times \\ \times m_s (y-1) [E_{s1} chm_s (y-1) + F_{s1} shm_s (y-1)] + \\ + \frac{a_2 x_s}{shx_s} [R_{s1} chx_s (y-1) + L_{s1} shx_s (y-1)] \},$$

где $p_s = 2(am_s^2 - n)$, которая после разложения в ряд Фурье по синусам

$$M_x \Big|_{x=\frac{g}{2}} = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} b_{k1} \sin l_k y,$$

где

$$b_{k1} = 4l_k \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{d_s (l_k^2 + m_s^2)} ((-1)^k l_k m_s^2 \left(\frac{2(1-n)}{l_k^2 + x_s^2} - \right. \\ \left. - \frac{(1-n)^2}{l_k^2 + m_s^2} \right) \left[\left(1 + \frac{sh2m_s}{2m_s} + \frac{2am_s^2}{1-n} e_s sh2m_s \right) t_{s1} + \right. \\ \left. + (h_s shm_s + 4am_s^2 t_s chm_s) a_{s1} \right] + \\ \left. + \left(\frac{2m_s^2}{l_k^2 + x_s^2} - \frac{m_s^2 + nl_k^2}{l_k^2 + m_s^2} \right) \{ -(h_s shm_s + \right. \\ \left. + 4am_s^2 t_s chm_s) t_{s1} + [(3+n)(1-n)m_s shm_s chm_s + \right. \\ \left. + (1-n)^2 m_s^2 - 4am_s^2 (1-n)q_s ch^2 m_s] a_{s1} \} \},$$

вновь используются для отыскания коэффициентов A_{k2}, B_{k2}, G_{k2} рядов w_{12}, Y_{12} .

И далее описанный выше процесс повторяется.

Анализ показывает, что коэффициенты A_{kn}, B_{kn} ряда (9) имеют порядок $O(1/k^2)$ при $n=1$ и $O(\ln k/k^2)$ при $n>1$; коэффициенты G_{kn} ряда (11) – $O(1/k)$ и $O(\ln k/k)$ соответственно. Ряд (9)

сходится не хуже, чем ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^3}$. Ряд (11)

для функции напряжений сходится равномерно всюду, исключая концы заделанного сечения (где он расходится); то же самое относится к функциональному ряду $M_y \Big|_{y=0}$, представляющему выражение изгибающего момента M_y в заделанном сечении пластины. Это означает, что на концах заделанного сечения имеют место «пики» напряжений, ко-

торые обусловлены резкой сменой граничных условий в этих точках.

Так как в ходе итерационного процесса невязки выполнения граничных условий должны убывать по абсолютной величине, то условие сходимости метода можно записать так: $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_{kn}, a_{sn}, t_{sn}) = 0$. В силу линейной связи этих величин между собой и с коэффициентами $A_{kn}, B_{kn}, G_{kn}, \dots$ это условие равносильно, например, условию: $\lim_{n \rightarrow \infty} B_{kn} = 0$.

В свою очередь, коэффициенты B_{kn} линейно зависят от совокупности коэффициентов B_{kn-1} предыдущей итерации, т.е. имеет место однородная бесконечная система линейных алгебраических уравнений вида

$$B_{kn} = \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} c_{ki} B_{in-1} \quad (k=1, 3, \dots), \text{ где } c_{ki} - \text{коэффициенты системы.}$$

Исследования показывают, что эта система является регулярной, т.е. $\sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} |c_{ki}| < 1$, а

это означает, что данный итерационный процесс сходится к точному решению задачи.

В качестве примеров получены численные результаты на ЭВМ для пластин с различным отношением сторон $\gamma=1/4, 1/2, 1, 2,$

4 и различной толщины $\bar{h}=0,02; 0,05; 0,1; 0,15; 0,2; 0,3; 0,4$ при коэффициенте Пуассона $\nu=0,3$. В рядах удерживалось до 150 членов. Процесс сходился по геометрической прогрессии со знаменателем $< 1/2$. Счёт прекращался после 10 итераций. Вычислялись коэффициенты рядов (9-12), а также изгибающие моменты M_y в заделанном сечении и прогибы противоположной грани.

На рис. 1 приведены линии относительных прогибов w грани $y=1$, а на рис. 2 – эпюры изгибающих моментов M_y (отнесенных к величине qb^2) в заделке квадратной пластины ($\gamma=1$). Кривая I соответствует классической теории тонких пластин Кирхгоффа [4]. Номера кривых 2-6 соответствуют относи-

тельным толщинам $\bar{h}=0,02; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4$ пластин Рейсснера.

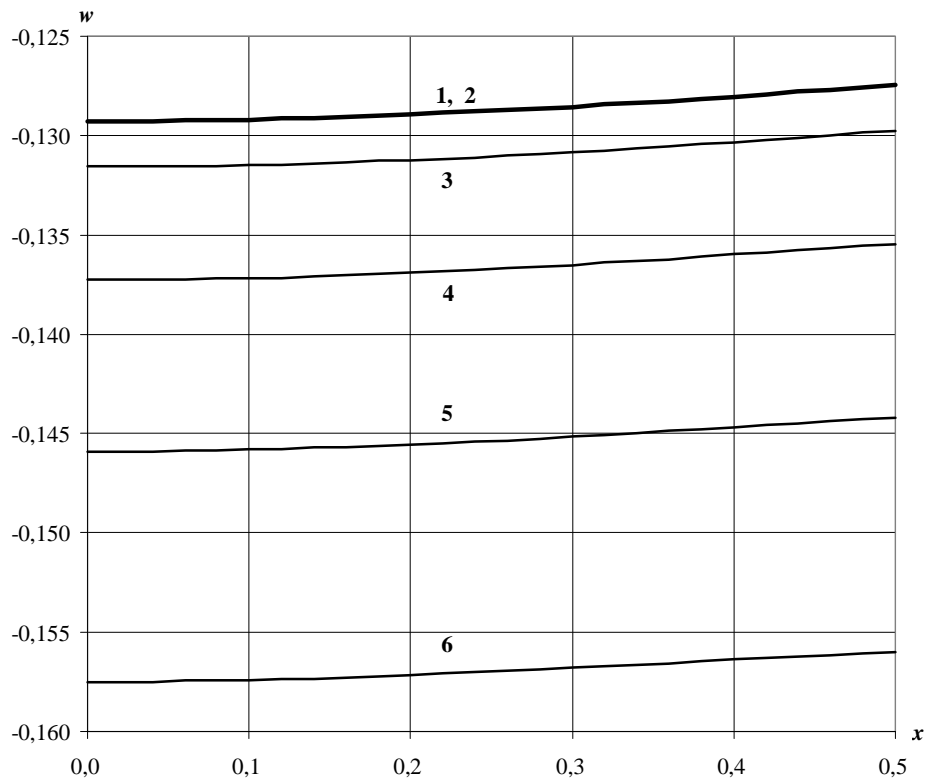


Рис. 1. Линии прогибов грани $y=1$

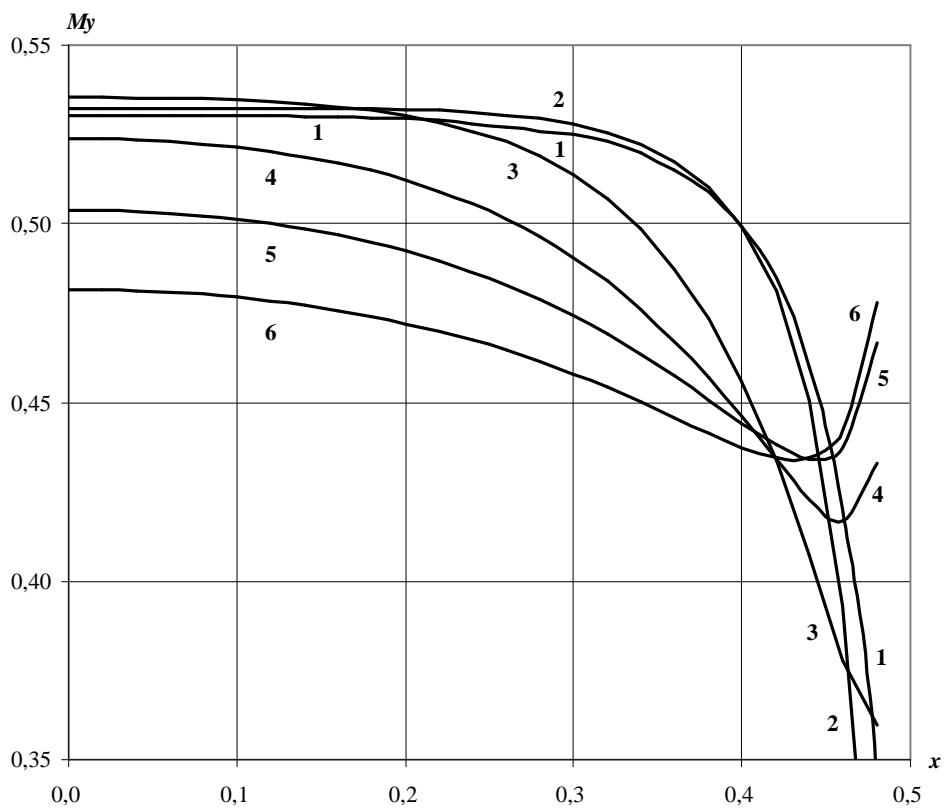


Рис. 2. Изгибающие моменты M_y в заделанном сечении

Расчёты показывают, что при малых относительных толщинах $\bar{h} \leq 1/20$ результаты для пластин Кирхгофа и Рейсснера практически совпадают. Различия принципиального характера проявляются лишь в изгибающих моментах M_y заделанного сечения вблизи края заделки. Если для пластин Кирхгофа $M_y \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow \pm\gamma/2$, то для пластин Рейсснера с ростом относительной толщины вблизи края заделки образуется минимум, который смещается к середине заделки и возрастает, после чего $M_y \rightarrow +\infty$. Таким образом, деформации поперечного сдвига, учитываемые в теории Рейсснера, резко меняют изгибающие моменты (а, следовательно, и напряжения) вблизи края заделанного сечения с $-\infty$ на $+\infty$. В середине заделки M_y с ростом \bar{h} сначала несколько возрастают, а затем убывают.

Относительные прогибы увеличиваются с ростом относительной толщины (абсолютные прогибы, разумеется, уменьшаются, т.к. $w = \frac{WD}{qb^4}$, где w - относительный прогиб, W - абсолютный прогиб срединной поверхности пластины).

Указанные выше особенности уточненной теории проявляются и для пластин с другим отношением сторон ($\gamma=1/4, 1/2, 1, 2, 4$).

Отметим для сравнения, что начальное приближение w_0 (8), соответствующее цилиндрическому изгибу пластины, даёт для прогибов грани $y = 1$ следующие значения: $-0,12507$; $-0,12664$; $-0,13157$; $-0,13981$; $-0,15129$ соответственно для относительных толщин $0,02$; $0,1$; $0,2$; $0,3$; $0,4$. Значения изгибающих моментов M_{y0} в заделке не зависят от толщины пластины и равны $0,5$ (как и для консольной балки).

Библиографический список

1. Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. – J. Appl-Mech., 1945, 12, p. A69-A77.
2. Тимошенко, С.П. Пластинки и оболочки. / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М.: Наука, 1966. – 636 с.
3. Васильев, В. З. Применение метода наложения неполных решений в случае первой основной задачи для полубесконечного цилиндра. – Тр. Ленингр. инж.-строит. ин-та. - 1973, № 73. - Механика стержневых систем и сплошных сред. - С. 15–22.
4. Сухотерин, М. В. Итерационный метод решения задачи об изгибе прямоугольной консольной пластины // Прикл. механика. – Киев, 1982, т. 18, № 5. - С. 121–125.
5. Сухотерин, М. В. К исследованию изгиба защемленной по контуру прямоугольной пластины Рейсснера. // Прикл. механика. – Киев, 1990, т. 26, № 7. - С. 120–124.

Информация об авторе

Сухотерин Михаил Васильевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики Санкт-Петербургского государственного университета водных коммуникаций. Область научных интересов: теория пластин.