

МОДЕЛИ И АЛГОРИТМЫ ВЫБОРА РЕШЕНИЙ НА ИТЕРАЦИЯХ ПОИСКА В ЧИСЛЕННЫХ ВЕКТОРНЫХ СХЕМАХ

© 2008 С. В. Белокуров

Воронежский институт МВД России

Рассмотрены вопросы выбора и принятия решений и проблемы моделирования, встречающиеся при использовании численных векторных схем на итерациях поиска.

Выбор, механизмы, модели, численные векторные схемы, итерации поиска

С задачами выбора и принятия решений приходится сталкиваться повсеместно. Особую роль в теории выбора играет информационное обеспечение процесса отбора, так как любой выбор строится на основе тех или иных предпочтений и информации о рассматриваемых вариантах.

Выбор можно также характеризовать его свойствами. Требования к рациональному решению обычно формулируются в виде набора аксиом. Аксиоматический язык используется в теории групповых решений для определения понятий “справедливость”, “согласованность” и в теории игр для определения понятий “равновесие”, “компромисс”.

Языки принятия решений можно разделить на два класса – языки концепций выбора и языки механизмов выбора. Концепции выбора ставят в соответствие каждой ситуации набор “лучших” решений или набор свойств “лучших” решений. Язык механизмов – это язык алгоритмов выбора. На языке концепций отвечают на вопрос “что выбрать”, на языке механизмов – “как выбрать”. Язык функций выбора и аксиоматический язык – это языки концепций выбора, язык математического программирования и язык бинарных отношений – примеры языков механизмов выбора.

Следует полагать, что функция выбора представляет собой наиболее естественное, универсальное и удобное для анализа описание концепции выбора. Отсюда – целесообразность выражения в терминах функций выбора результатов, формируемых на других языках теории принятия решений.

Таким образом, для организации выбора множества лучших альтернатив на итерациях поиска будем использовать язык функций выбора [1-3].

Рассмотрим множество H – множество вариантов $\{x, y, \dots\}$. $X \subseteq H$ – непустое множество H , предъявленное для выбора; $C(X) = Y \subseteq X$ ($Y \neq \emptyset$) – выбор из X по некоторому правилу C части вариантов. Это правило и называют функцией выбора. С позиции теории выбора общая формальная модель задачи выбора может быть представлена в виде:

$$C(\bullet): \{X\} \rightarrow \{X\}, \{X\} \subseteq 2^H, \forall X \subset \{X\} \quad C(X) = Y, \quad (1)$$

где H – множество рассматриваемых вариантов $\{x, y, \dots\}$; $X \subseteq H$ – непустое множество H , предъявленное для выбора; $C(X) = Y \subseteq X$ ($Y \neq \emptyset$) – выбор из X по некоторому правилу C части вариантов, $Y \subseteq X$.

Сам процесс выбора рассматривается как “чёрный ящик”, на вход которому поступает множество рассматриваемых альтернатив $X \subseteq H$, называемое предъявлением, а на выходе получается множество $Y \subseteq X$ выбранных альтернатив, называемое выбором. Таким образом, функция выбора определяет “внешнее” описание процесса выбора.

В свою очередь “внутреннее” описание, т. е. описание того, как множество Y выделяется из X , определяется механизмом выбора, обозначаемым через $M = \langle s, p \rangle$. s – структура на множестве X (совокупность сведений, в том числе полученных от лица,

принимающего решение (ЛПР) обо всех рассматриваемых вариантах из X , позволяющих сравнивать эти варианты); p – правило выбора, которое указывает, как, используя структуру S , получить Y из X . Механизмы, порождающие одинаковую функцию выбора $C(X)$, являются эквивалентными.

Функции выбора чаще сводятся к двум основным заданиям:

1) “Поэлементное задание”, т.е. множество $Y = C(X) \subseteq X$ – это набор элементов, удовлетворяющих условиям:

$$C(X) = \{ y \in X \mid P \}, \quad (2)$$

где P – некоторый оператор, формализующий условие выбора.

2) “Целостное задание”, т.е. $C(X) = \{ Y \subseteq X \mid P \}$ есть некоторое подмножество множества X , которое в отличие от других его подмножеств удовлетворяет некоторому требованию P .

Механизмы выбора чаще представляются двумя компонентами: “структура” и “правило” выбора. При обеих формах выражения для $C(X)$ выделение Y из X опирается на некоторую заранее заданную совокупность сведений о вариантах X помимо данного исходного множества H .

Любая формализация таких сведений, использующаяся при описании механизма выбора, называется структурой и обозначается символом S . В качестве примера можно привести шкалы критериальных оценок или бинарные отношения, т.е. “структуры предпочтений”. Каждый механизм выбора M характеризуется, во-первых, заданием структуры S и, во-вторых, правилом выбора p , которое указывает, как построить множество $C(X)$ для любого $\{x \in H^0\}$ на основе данной структуры S . Здесь $H^0 = 2^H \setminus \{\emptyset\}$, т.е. множество всех непустых подмножеств H , $|H|$ – мощность H .

Если используется определение “поэлементной” формы выбора (2), то правило выбора p – это то, что записано в виде оператора P . Можно формализовать правило выбора в “поэлементной” форме:

$$p: y \in X \mid P \quad (3)$$

и аналогично в “целостной” форме:

$$p: Y \subseteq X \mid P, \quad (4)$$

где P – оператор выбора, в обоих случаях формализующий условие, которому удовлетворяют элементы $\{y\}$ или множества Y , выделяемые правилом p .

При этом в (4) корректное определение p требует, чтобы выражение на месте многоточий единственным образом определяло множество Y при любом допустимом значении X .

В зависимости от сформированной структуры S на множестве A рассматриваемых альтернатив всё многообразие механизмов выбора можно разделить на три класса: парнодоминантные, однокритериально-экстремизационные и многокритериально-экстремизационные механизмы выбора.

У парнодоминантных механизмов выбора $M = \langle \cdot, \cdot \rangle$ в качестве структуры S выступают бинарные отношения разрешения (R_p) или запрещения (R_s), а в качестве правила выбора

для отношения R_p –

$$: x \in C(X) \Leftrightarrow (\forall y \in X \quad x R_p y); \quad (5)$$

для отношения R_s –

$$: x \in C(X) \Leftrightarrow (\exists y \in X: y R_s x). \quad (6)$$

Отношения R_p и R_s являются обратно дополнительными: $R_p = \overline{R_s^{-1}}$, $R_s = \overline{R_p^{-1}}$.

В зависимости от ограничений, накладываемых на бинарные отношения R_p и R_s , выделяют следующие уровни парнодоминантного механизма выбора: если R_p или R_s – ациклические отношения, то парнодоминантный механизм выбора M имеет уровень 1; если R_p или R_s – ациклические и транзитивные отношения, называемые качественным порядком, строгим частичным порядком, то парнодоминантный механизм выбора M

имеет уровень 2; если R_p или R_s – ациклические, транзитивные и отрицательно-транзитивные отношения, то механизм выбора M имеет уровень 3; если R_p или R_s – отношения сильного порядка, то механизм выбора M имеет уровень 1 – 2 – 3.

Функция выбора, порождаемая парнодоминантным механизмом выбора:

- уровня 1 – удовлетворяет одновременно условиям наследования (H) и согласия (C):

$$\forall X, X' \quad X' \subseteq X \Rightarrow C(X') \supseteq C(X) \text{ I } X', \quad (7)$$

$$\forall X', X'' \quad X = X' \cup X'' \Rightarrow C(X) \supseteq C(X') \text{ I } C(X''); \quad (8)$$

- уровня 2 – условиям: наследования (H), согласия (C) и независимости от отбрасывания отвергнутых вариантов (O):

$$\forall X, X' \quad C(X) \subseteq X' \subseteq X \Rightarrow C(X') = C(X); \quad (9)$$

- уровня 3 – условию константности (K):

$$\forall X, X' \quad X' \subseteq X \Rightarrow \begin{cases} \text{если } C(X) = \emptyset, & \text{то } C(X') = \emptyset, \\ \text{если } C(X) \text{ I } X' \neq \emptyset, & \text{то } C(X') = C(X) \text{ I } X'; \end{cases} \quad (10)$$

- уровня 1 – 2 – 3 – условиям наследования (H), отбрасывания (O) и константности (K).

У однокритериально-экстремизационных механизмов выбора $M = \langle S, p \rangle$ в качестве структуры S выступает критериальная шкала. Это некоторая числовая ось j , на которую отображено множество X , позволяющая приписать каждому варианту $x \in X$ число $j(x)$, соответствующее той точке шкалы j , в которую отображён вариант. При этом, если на шкале нет точек, в которых размещено более одной альтернативы, то шкала называется строгой. В качестве p используют следующее правило:

$$: x \in C(X) \Leftrightarrow x = \arg \min j(x) \quad (11)$$

или, что эквивалентно следующему выражению:

$$: x \in C(X) \Leftrightarrow (\exists y \in X | j(y) < j(x)),$$

либо

$$: x \in C(X) \Leftrightarrow (\forall y \in X j(x) \leq j(y)).$$

Если бинарное отношение запрещения R записать как

$$y R_s x \Leftrightarrow j(y) < j(x),$$

то однокритериально-экстремизационный механизм выбора по любой критериальной шкале сводится к парнодоминантному механизму выбора, то есть является парнодоминантно представимым.

Однокритериально-экстремизационный механизм выбора используется в аксиоматических методах, где роль структуры u на множестве альтернатив A играет функция полезности; в ряде прямых методов (принцип гарантированного уровня, принцип абсолютной уступки, принцип выделения главного критерия и др.); в методах скаляризации вектора показателя качества альтернатив. В последнем случае в качестве структуры S выступает свёртка, реализуемая скалярной функцией j , сопоставляющей векторной оценке качества $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ каждой решения скалярную интегральную оценку качества $j(x)$.

Многокритериально-экстремизационные механизмы выбора используются в тех случаях, когда из допустимого множества альтернатив необходимо выделить подмножество недоминируемых вариантов. В качестве структуры S здесь выступает вектор показателей качества $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, а в качестве p используется правило выбора Парето:

$$: x \in C(X) \Leftrightarrow (\forall y \in X \forall j \quad x_j \leq y_j \wedge \exists j_0 | x_{j_0} < y_{j_0}) \quad (12)$$

Если бинарное отношение разрешения R_p записать как

$$x R_p y \Leftrightarrow (\forall j \ x_j \leq y_j \wedge \exists j_0 \mid x_{j_0} < y_{j_0}),$$

то можно убедиться, что оно является ациклическим и транзитивным, но не отрицательно-транзитивным отношением, и многокритериально-экстремизационный механизм выбора совпадает с классом парнодоминантных механизмов уровня 2.

Рассматривается и так называемый механизм выбора с нечувствительностью (механизм интервального выбора), являющийся обобщением однокритериально-экстремизационного механизма. В этом случае при сравнении оценок $j(x)$ и $j(y)$ показателей качества вариантов решений $x, y \in A$ имеется допуск (зона нечувствительности) $e \geq 0$ такой, что y превосходит x лишь при условии $j(y) - j(x) > e$. Правило выбора p записывают в следующем виде:

$$: y \in C(X) \Leftrightarrow (y \in X \wedge \exists x \in X \mid j(x) - j(y) > e).$$

Любой механизм выбора лучших вариантов по шкале с нечувствительностью является парнодоминантно представимым механизмом.

В литературе также рассматривается и многокритериальный механизм выбора с нечувствительностью $e = e(y)$. В качестве структуры в нём выступают вектор оценок показателей качества $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ и набор функций $\{e_j\}$, $e_j \geq 0$, $j = \overline{1, m}$, характеризующих “нечувствительность” ЛПР по оценкам показателей качества сравниваемых альтернатив. Правило выбора p записывается в виде:

$$: y \in C(X) \Leftrightarrow (y \in X \wedge \exists x \in X \mid \forall j = \overline{1, m} \ x_j - y_j > e_j).$$

Следует заметить, что, согласно терминологии, парнодоминантные механизмы выбора (11) и (12), записанные в виде (5), (6), называют оптимизационными механизмами доминирования (5) и блокировки (6), определяемыми бинарным отношением R в вершине разрешения.

Согласно вышеизложенному, можно утверждать, что важной особенностью этапа выбора является наличие дополнительной информации о предмете выбора, которую

особенно в векторном случае недоминируемых альтернатив часто способен предоставить только ЛПР. В зависимости от возможностей выявления у ЛПР требуемой дополнительной информации о рассматриваемых вариантах решений, используемой для формирования структуры S на множестве X , можно выделить классы априорных, апостериорных и адаптивных моделей выбора.

В априорных моделях требуемой дополнительной информацией является некий принцип оптимальности Opt , в соответствии с которым формулируется правило выбора p . Оператор Opt представляется в явном виде либо формульным соотношением между оценками свойств альтернативы, либо понятием лучшего решения, определение которого становится возможным на основе бинарного отношения доминирования на множестве оценок.

В основе апостериорных моделей лежит предположение о том, что формальная модель задачи выбора не содержит достаточной информации, по которой ЛПР может сформулировать соответствующей целевой установке принцип оптимальности. Поэтому здесь ставится задача полного восстановления принципа оптимальности на всём рассматриваемом множестве альтернатив в явном виде на частичной дополнительной информации. Восстанавливаемый принцип оптимальности задаёт формальную модель описания системы предпочтения ЛПР.

В адаптивных моделях задачи выбора не предполагается введение или полное восстановление принципа оптимальности в явном виде. Здесь информация о предпочтениях ЛПР используется непосредственно на итерациях поиска лучшей альтернативы. Таким образом, в адаптивных моделях решается задача оптимизации по неявно заданному принципу оптимальности. Здесь можно отметить человеко-машинные методы, использующие преимущества интерактивного режима решения задач.

Рассмотренные выше априорные, апостериорные и адаптивные модели задач выбора используются для решения численных векторных схем, однако не формализовались ранее на итерациях поиска. Это позволило

бы создать мощные, универсальные, гибкие в настройке алгоритмы и модели выбора, использовать интерактивные диалоговые процедуры корректировки поиска.

Библиографический список

1. Белокуров, С. В. Синтез функций выбора на итерациях поиска в численных моделях многокритериальной оптимизации [Текст] / С. В. Белокуров, Ю. С. Сербулов, С. В. Величко и др. - Воронеж: Научная книга, 2003. – 95 с.

2. Белокуров, С. В. Задача выбора оптимальных вариантов на основе вероятностного подхода [Текст] / С. В. Белокуров, В. И.Сумин, М. В. Питолин и др. // Вестник ВГТУ. - Сер. Радиоэлектроника и системы связи. - 2006. - № 7. - С. 59-62.

3. Белокуров, С. В. Математические модели в условиях динамики рыночной транспортной среды [Текст] / С. В. Белокуров, А. В. Кононова // Экономика и производство. - 2007. – № 1. - С. 20-23.

Информация об авторе

Белокуров Сергей Владимирович, преподаватель кафедры Информационно-технического обеспечения ОВД, к. ф-м. н., доцент Воронежский институт МВД России. Область научных интересов - Методы системного моделирования, теории векторной оптимизации и экстраполяции экспертных оценок, теории выбора и принятия решения, вычислительной математики, теории графов, структурного и системного программирования, новые информационные технологии, модели и алгоритмы для организации и управления движением городского пассажирского транспорта.