

## ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С ПОМОЩЬЮ НЕКАНОНИЧЕСКОГО РАЗЛОЖЕНИЯ

© 2008 С. Н. Перов, Ю. В. Скворцов

Самарский государственный аэрокосмический университет

При решении задачи статистической динамики требуется по известным вероятностным характеристикам входной случайной функции строить её выборочные функции – реализации. Данная проблема решается представлением случайных процессов в виде детерминированных функций некоторой совокупности случайных величин. Наиболее распространены линейные канонические разложения случайных функций, которые удобно использовать при анализе линейных систем. Для решения нелинейной задачи статистической динамики каноническое разложение по базисным координатным функциям трудно реализуемо. В настоящей работе применяется нелинейная неканоническая форма представления случайных процессов, предложенная в [1].

*Стационарный случайный процесс, корреляционная теория, метод интерполяционных полиномов, нелинейное неканоническое разложение*

Для неканонического представления стационарных случайных процессов со сложным спектром можно воспользоваться методом интерполяционных полиномов, согласно которому  $k$ -я реализация случайного процесса  $x(t)$  записывается в виде

$$x_k(t) = \langle x(t) \rangle + g_{k_1} \sin w_{k_3} t + d_{k_2} \cos w_{k_3} t, \quad (1)$$

где  $\langle x(t) \rangle$  – математическое ожидание процесса;  $g_{k_1}$ ,  $d_{k_2}$ ,  $w_{k_3}$  – значения независимых случайных величин  $g$ ,  $d$ ,  $w$  в узлах интерполирования; номер  $k$  определяется соответствующим перебором индексов  $k_1$ ,  $k_2$  и  $k_3$ . Поскольку законы распределения случайных величин  $g$  и  $d$  здесь могут быть произвольными с параметрами  $\langle g \rangle = \langle d \rangle = 0$ ,  $D_g = D_d = D_x$  (где  $D_x$  – дисперсия стационарного процесса  $x(t)$ ), то целесообразно задавать их нормальными. При этом функция плотности вероятности случайной величины  $w$  определяется выражением

$$f(w) = \frac{2}{p D_x} \int_0^{\infty} K_x(t) e^{-iwt} dt = \frac{S_x(w)}{D_x}. \quad (2)$$

Здесь  $K_x(t)$  и  $S_x(w)$  – корреляционная функция и спектральная плотность исходного стационарного случайного процесса  $x(t)$ .

В рамках корреляционной теории неканоническое разложение вида (1) обеспечивает абсолютно точное представление случайных процессов. Небольшое число случайных величин ( $g$ ,  $d$ ,  $w$ ) даёт возможность разработки эффективного алгоритма получения реализаций случайных процессов заданной спектральной плотности.

Для определения узлов интерполяции случайной величины  $w$  целесообразно не искать соответствующую систему ортогональных полиномов, а выполнить  $u$ -преобразование.

В табл. 1 представлены аналитические выражения для корреляционных функций и спектральных плотностей случайных процессов, которые наиболее часто употребляются в практике для аппроксимации реальных характеристик [2]. В эти зависимости входят следующие параметры:  $D$  – дисперсия процесса,  $a$  – коэффициент затухания корреляционной функции,  $w_0$  – собственная круговая частота нелинейной системы,  $w_c$  – предельная круговая частота.

В табл. 2 для каждой спектральной плотности приведены функция распределения случайной величины  $w$

$$F(w) = \int_0^w f(w) dw$$

и  $u$ -преобразование для получения узлов

Таблица 1. Корреляционные функции и спектральные плотности некоторых стационарных случайных процессов

№ процесса	$K(t)$	$S(w)$
1	$D \frac{\sin w_c t}{w_c t}$	$\frac{D}{w_c}, 0 \leq w \leq w_c$
2	$D \frac{\sin w_c t}{w_c t} (2 \cos w_c t - 1)$	$\frac{D}{w_c}, w_c \leq w \leq 2w_c$
3	$D e^{-a t }, a > 0$	$\frac{2D}{p} \frac{a}{a^2 + w^2}$
4	$D e^{-a^2 t^2}$	$\frac{D}{a\sqrt{p}} \exp\left(-\frac{w^2}{4a^2}\right)$
5	$D e^{-a t } \cos w_0 t, a > 0$	$\frac{2aD}{p} \frac{w^2 + a^2 + w_0^2}{(w^2 - a^2 - w_0^2)^2 + 4a^2 w^2}$
6	$D e^{-a t } \left( \cos w_0 t - \frac{a}{w_0} \sin w_0  t  \right), a > 0$	$\frac{4aD}{p} \frac{w^2}{(w^2 + a^2 + w_0^2)^2 - 4w_0^2 w^2}$

Таблица 2. Функции распределения и у-функции

№ процесса	$F(w)$	$w = y(x)$
1	$\frac{w}{w_c}$	$w = \frac{w_c}{2}(x+1)$
2	$\frac{w}{w_c} - 1$	$w = \frac{w_c}{2}(x+3)$
3	$\frac{2}{p} \operatorname{arctg} \frac{w}{a}$	$w = a \operatorname{tg} \frac{p(x+1)}{4}$
4	$\operatorname{erf}\left(\frac{w}{2a}\right)$	$\operatorname{erf}\left(\frac{w}{2a}\right) = \frac{1}{2}(x+1)$
5	$\frac{1}{p} \left( \operatorname{arctg} \frac{w+w_0}{a} + \operatorname{arctg} \frac{w-w_0}{a} \right)$	$w = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + (a^2 + w_0^2)t^2}}{t};$ $t = \operatorname{tg} \frac{p(x+1)}{2};$ "+" при $t > 0$ ; "-" при $t < 0$
6	$\frac{a}{2pw_0} \ln \left  \frac{w^2 - 2w_0 w + a^2 + w_0^2}{w^2 + 2w_0 w + a^2 + w_0^2} \right  +$ $+\frac{1}{p} \left( \operatorname{arctg} \frac{w+w_0}{a} + \operatorname{arctg} \frac{w-w_0}{a} \right)$	$\frac{a}{w_0} \ln \left  \frac{w^2 - 2w_0 w + a^2 + w_0^2}{w^2 + 2w_0 w + a^2 + w_0^2} \right  +$ $+2 \left( \operatorname{arctg} \frac{w+w_0}{a} + \operatorname{arctg} \frac{w-w_0}{a} \right) = p(x+1)$

интерполяции по соответствующим узлам интерполяции случайной величины, распределенной по равномерному закону:

$$F(x) = \frac{1}{2}(x+1), \quad x \in [-1; 1].$$

Анализ табл. 1 и 2 показывает, что для нахождения значений узлов интерполяции процессов вида 4 и 6 необходимо решать трансцендентное уравнение. Поэтому в этом случае получить решение возможно только с

применением тех или иных итерационных алгоритмов.

Реальный широкополосный случайный процесс можно схематизировать суперпозицией  $n$  процессов, имеющих типовые спектральные плотности с одним максимумом (табл. 1). При этом спектральную плотность широкополосного процесса можно представить как

$$S_x(\omega) = \sum_{i=1}^n S_{x_i}(\omega),$$

где  $S_{x_i}(\omega)$  – спектральная плотность узкополосного процесса, имеющая стандартный вид.

Аналогично для корреляционной функции можно записать

$$K_x(t) = \sum_{i=1}^n K_{x_i}(t).$$

Используя и далее принцип суперпозиции, неканоническое разложение реального процесса можно осуществить в виде

$$x(t) = \sum_{i=1}^n [\langle x_i(t) \rangle + g_i \sin w_i t + d_i \cos w_i t].$$

Тогда конкретные реализации случайного процесса с использованием метода интерполяционных полиномов будут определяться как

$$x_k(t) = \sum_{i=1}^n [\langle x_i(t) \rangle + g_{i_{k_1}} \sin w_{i_{k_3}} t + d_{i_{k_2}} \cos w_{i_{k_3}} t] \\ (k = 1, 2, \dots, q; q = \prod_{i=1}^n q_{i1} q_{i2} q_{i3}). \quad (3)$$

Здесь  $g_{i_{k_1}}$ ,  $d_{i_{k_2}}$  – узлы интерполяции случайных величин нормального закона распределения, которые находятся по формулам

$$g_{i_{k_1}} = I_{k_1} \sqrt{D_{x_i}}; \quad d_{i_{k_2}} = I_{k_2} \sqrt{D_{x_i}} \\ (k_s = 1, 2, \dots, q_{is}; s = 1, 2),$$

где  $I_{k_s}$  – табулированные значения узлов типа Чебышева центрированного нормированно-

го нормального распределения;  $w_{i_{k_3}}$  – узлы интерполяции случайной величины  $w_i$ , определяемые с помощью  $u$ -преобразования (табл. 2);  $q_{i1}$ ,  $q_{i2}$  и  $q_{i3}$  – числа узлов интерполяции, выбираемые соответственно для переменных  $g_i$ ,  $d_i$  и  $w_i$  случайного процесса  $x_i(t)$ .

Были исследованы возможности неканонического разложения случайных процессов сложной структуры с помощью метода интерполяционных полиномов (3). При этом приближённые значения корреляционной функции процесса определялись по отдельным его реализациям с использованием зависимости

$$K_x^n(t) = \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{k_1=1}^{q_{i1}} \sum_{k_2=1}^{q_{i2}} \sum_{k_3=1}^{q_{i3}} d_{i_{k_2}} \left( g_{i_{k_1}} \sin w_{i_{k_3}} t + \right. \right. \\ \left. \left. + d_{i_{k_2}} \cos w_{i_{k_3}} t \right) r_{k_1} r_{k_2} r_{k_3} \right\}, \quad (4)$$

где  $r_{k_1}$ ,  $r_{k_2}$ ,  $r_{k_3}$  – числа Кристоффеля случайных величин  $g_i$ ,  $d_i$  и  $w_i$ .

Сглаженная оценка спектральной плотности находилась по дискретным значениям корреляционной функции

$$S_x^n(\omega) = \frac{2}{p} \Delta t \sum_{r=0}^{L-1} K_{xr} \Omega(r) \cos(\omega r \Delta t). \quad (5)$$

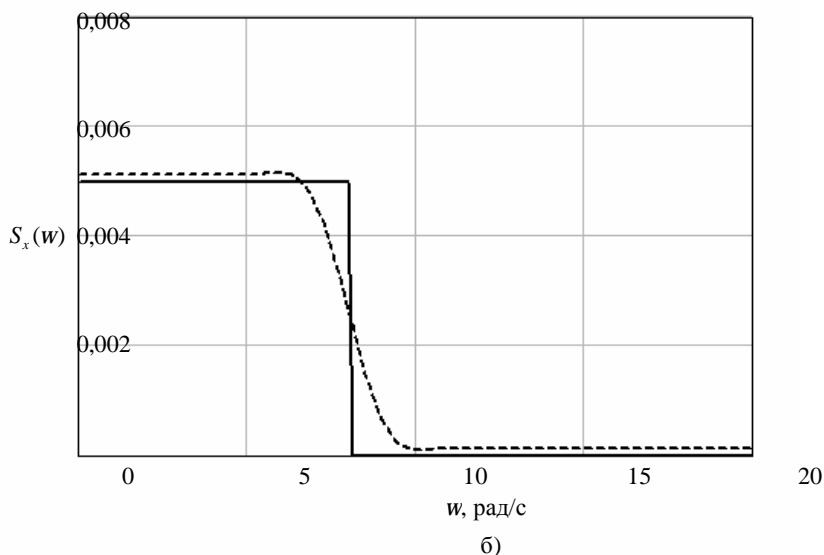
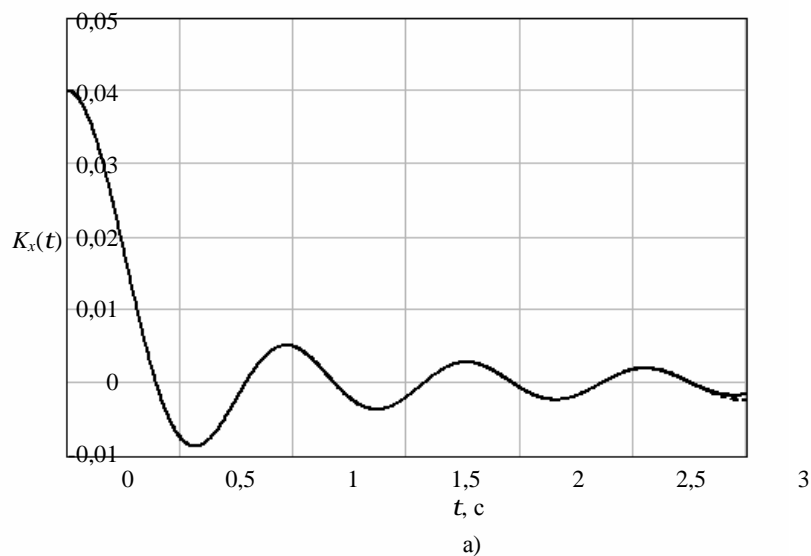
Здесь  $\Delta t$  – шаг дискретизации корреляционной функции по времени;  $K_{xr} = K_x(r \Delta t)$  – дискретные значения корреляционной функции;  $\Omega(r) = 0,5[1 + \cos(pr/L)]$  – сглаживающее «окно» Тьюки [3];  $L$  – точка отсечения «окна».

Оценки, полученные по формулам (4) и (5), сравнивались с точными значениями корреляционной функции и спектральной плотности. Поскольку вычисления по формуле (5) позволяют находить лишь приближённую оценку спектральной плотности, проводилось качественное сравнение спектров. Следует отметить, что критерием точности в методе интерполяционных полиномов является сравнение значений корреляционных функций в соответствующие моменты времени.

На рис. 1...4 представлены теоретические и рассчитанные методом интерполяционных полиномов значения корреляционных функций и спектральных плотностей типовых узкополосных процессов с номерами 1, 2, 3 и 5 соответственно (табл. 1). Используемые при этом исходные данные сведены в табл. 3.

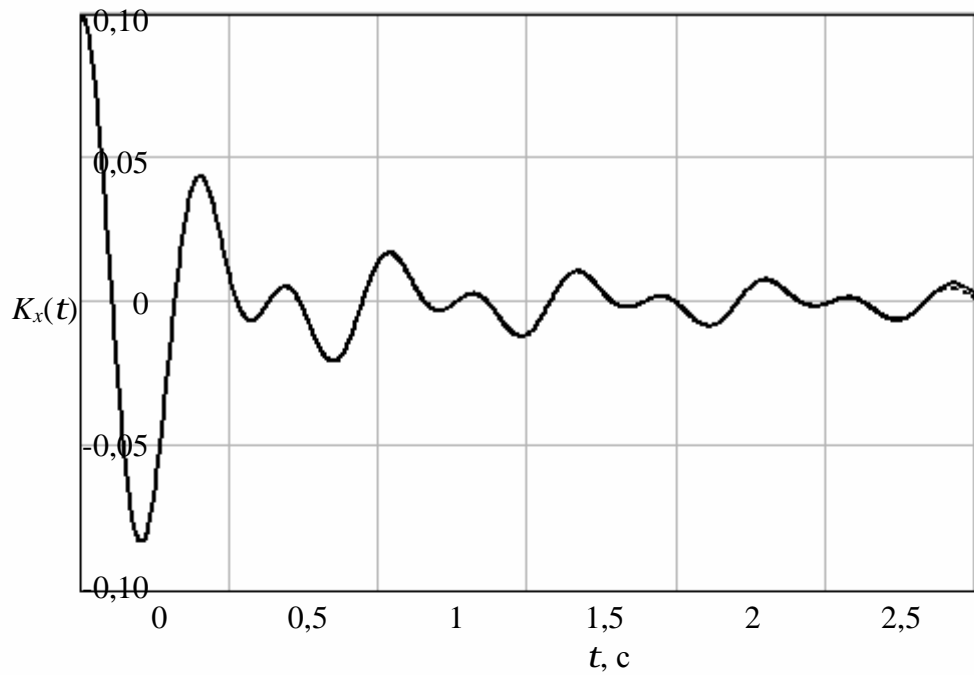
На рис. 5 приведены результаты для случайного процесса сложной структуры, полученного суперпозицией всех четырёх изображённых на рис. 1...4 узкополосных процессов.

Анализ результатов показывает, что надлежащим выбором числа узлов интерполяции случайных величин  $g$ ,  $d$  и  $w$  неканонического разложения можно добиться достаточно точного представления реализаций узкополосных процессов и случайных процессов сложной структуры. Это доказывает приемлемость принципа суперпозиции при моделировании реализаций. Следует отметить, что для случайных величин  $g$  и  $d$  достаточно брать по два узла интерполяции, а для параметра  $w$  требуется от восьми до шестнадцати узлов.



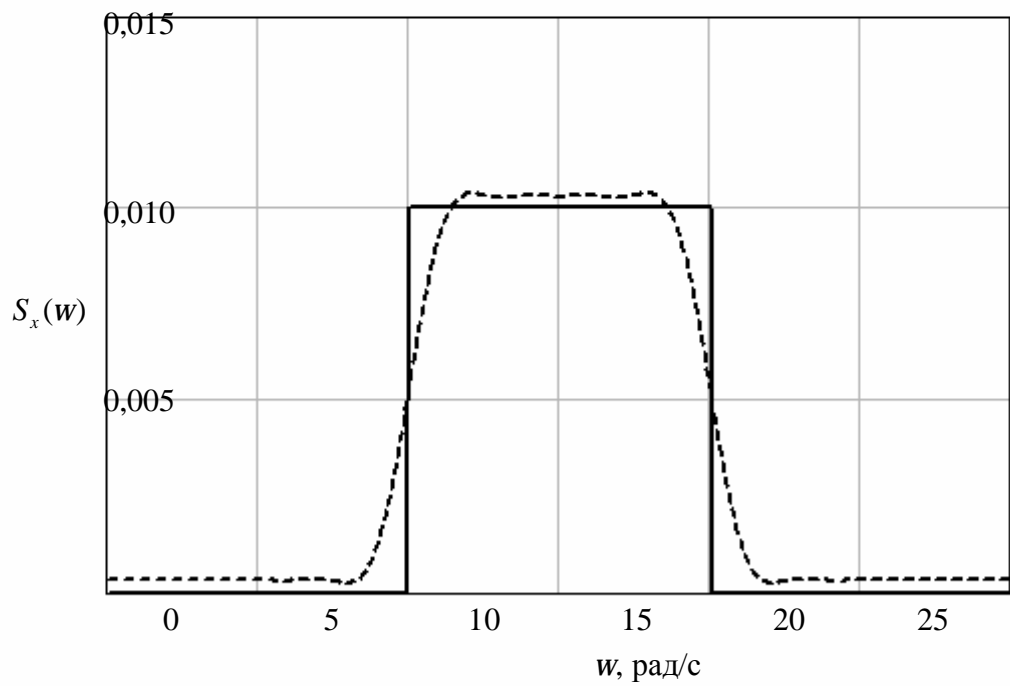
— — теоретические значения  
 - - - - - рассчитанные значения

Рис. 1. Корреляционная функция (а) и спектральная плотность (б) узкополосного процесса №1 (число узлов  $q_g = q_d = 2$ ;  $q_w = 8$ )



3

a)

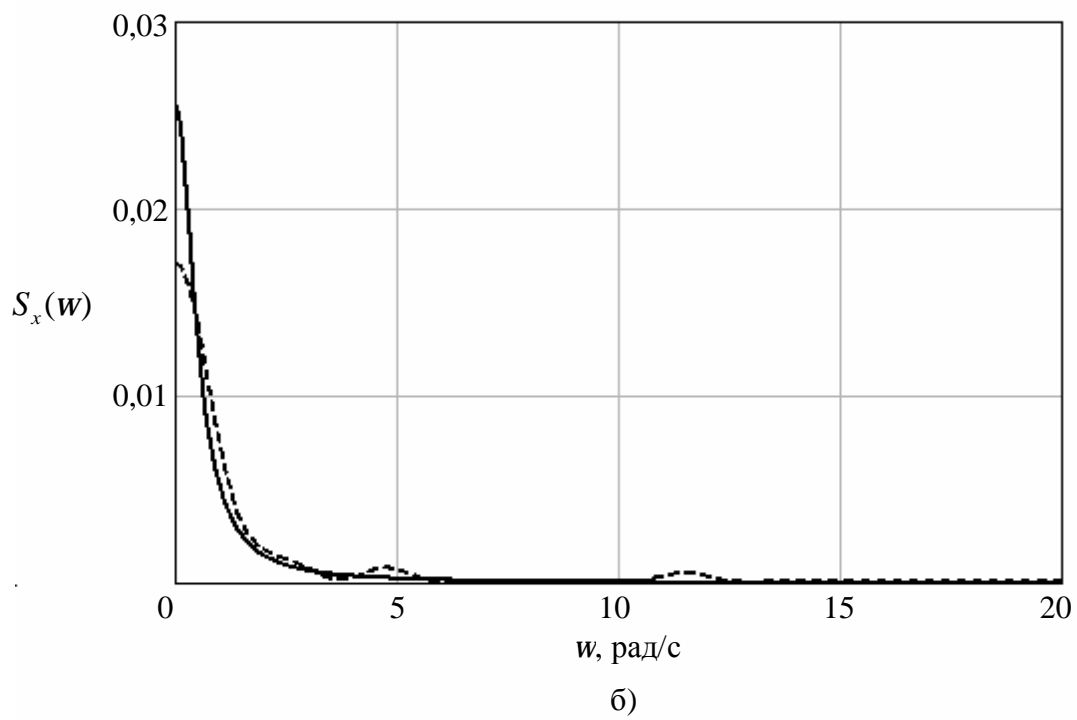
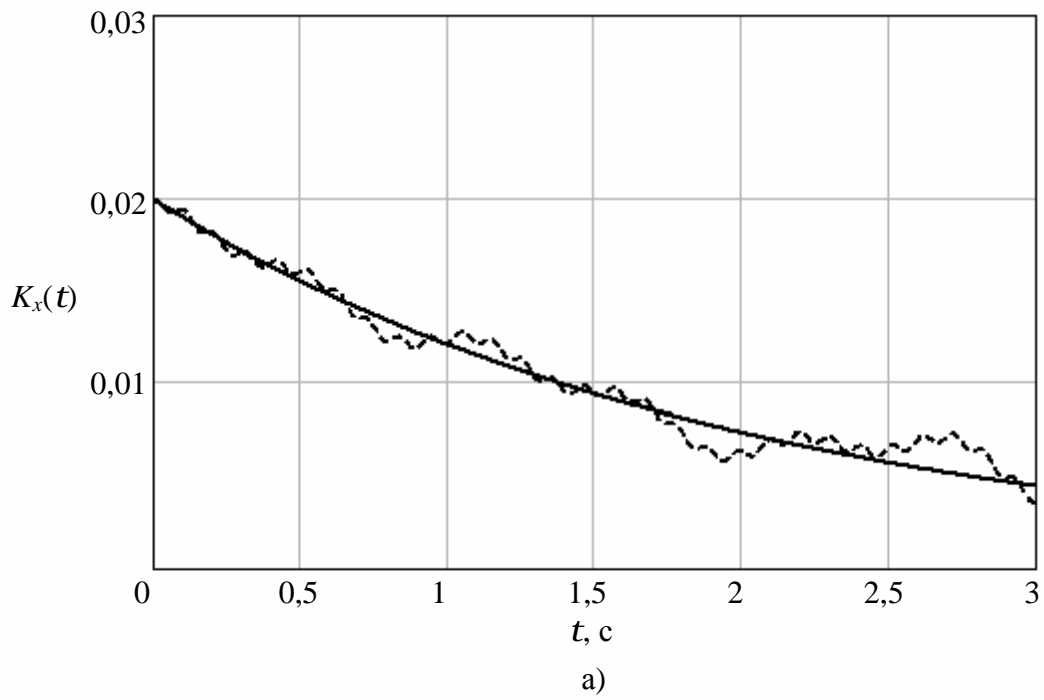


30

б)

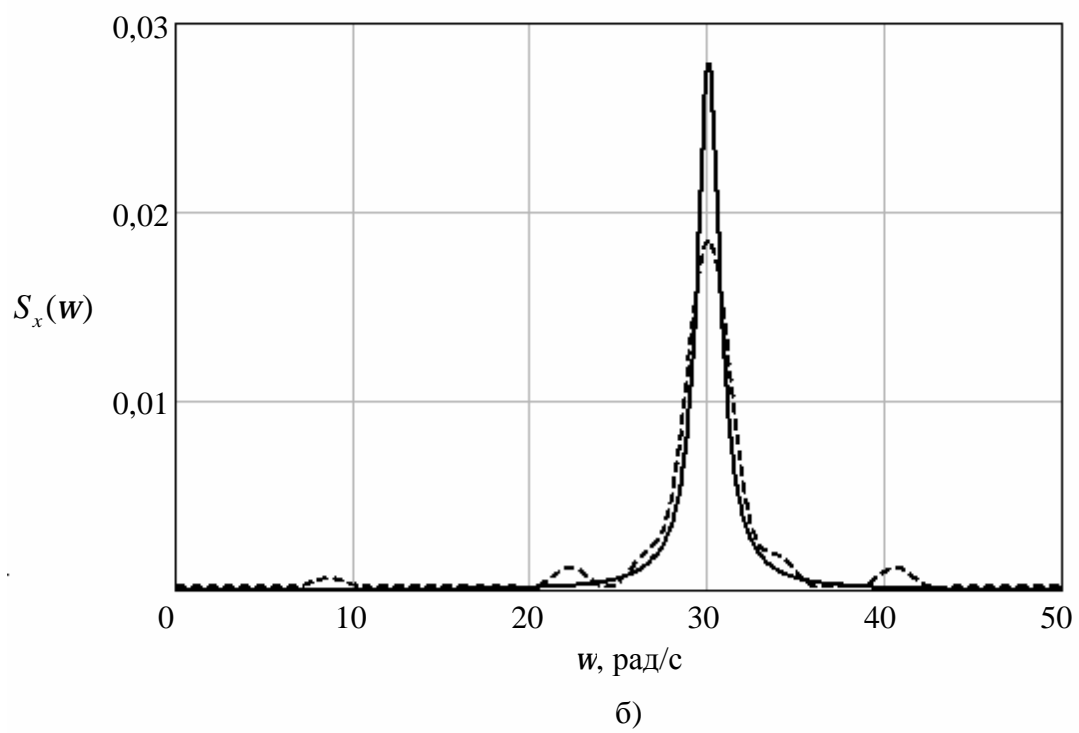
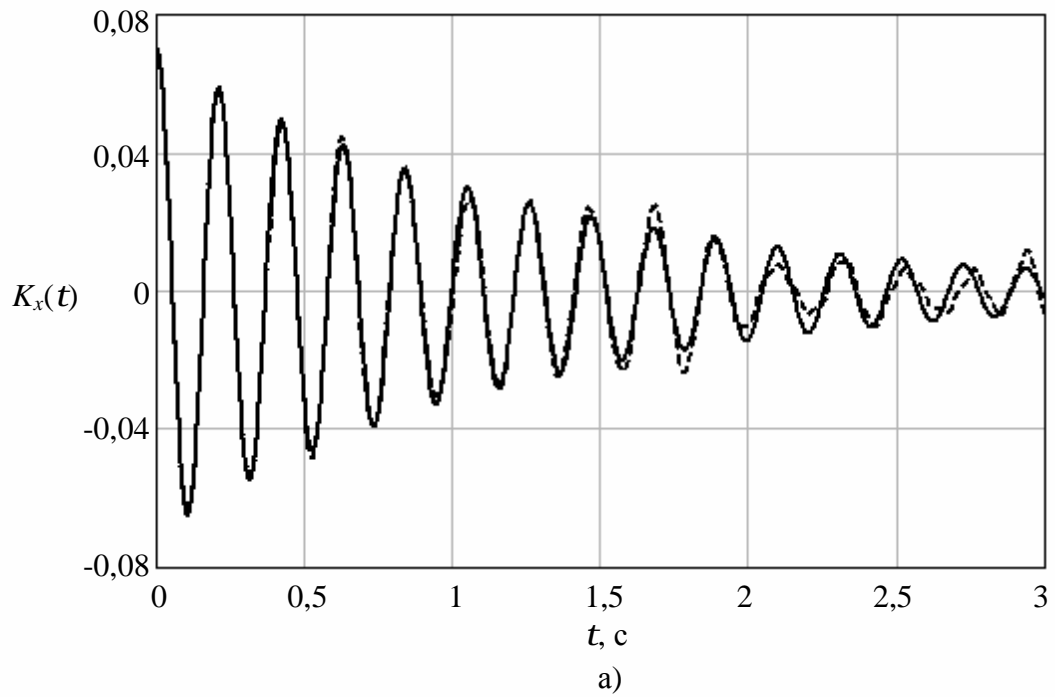
— — теоретические значения  
 - - - - - рассчитанные значения

Рис. 2. Корреляционная функция (а) и спектральная плотность (б) узкополосного процесса №2 (число узлов  $q_g = q_d = 2$ ;  $q_w = 10$ )



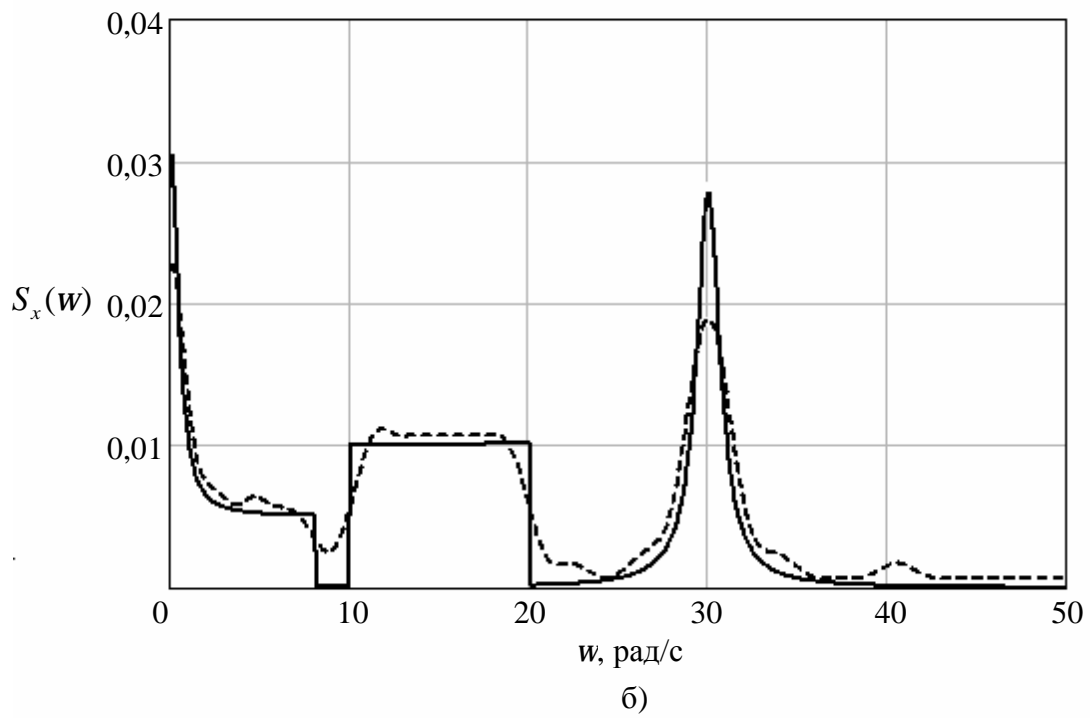
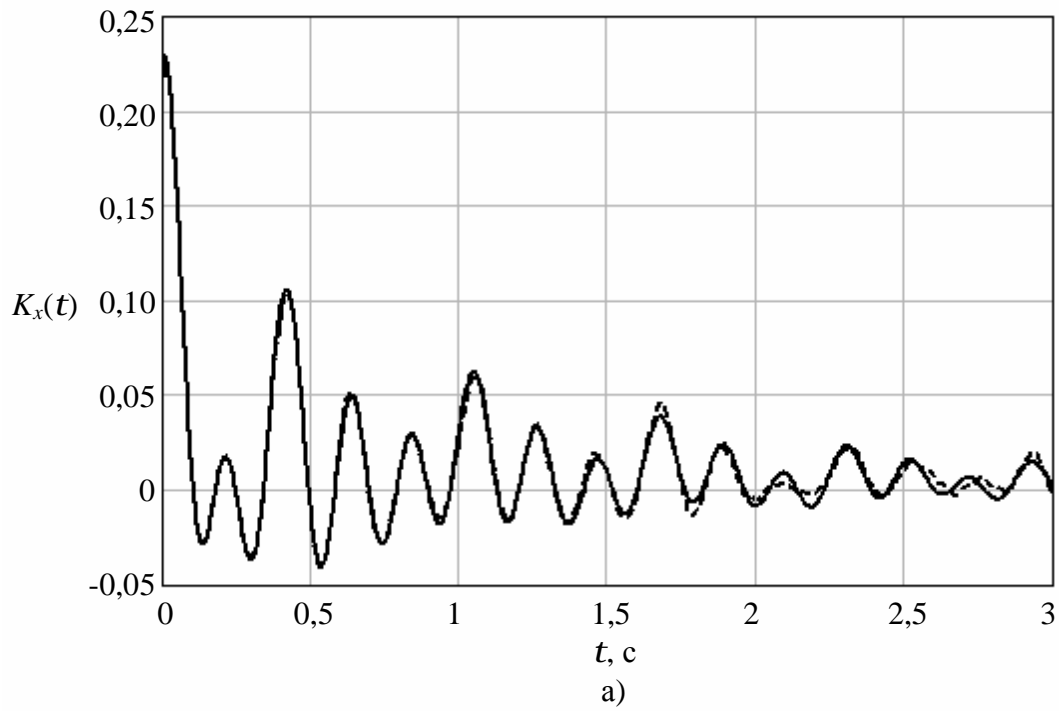
— — теоретические значения  
 - - - - - рассчитанные значения

Рис. 3. Корреляционная функция (а) и спектральная плотность (б) узкополосного процесса №3 (число узлов  $q_g = q_d = 2$ ;  $q_w = 16$ )



— — теоретические значения  
 - - - - - рассчитанные значения

Рис. 4. Корреляционная функция (а) и спектральная плотность (б) узкополосного процесса №5  
 (число узлов  $q_g = q_d = 2$ ;  $q_w = 16$ )



————— — теоретические значения  
 - - - - - — рассчитанные значения

Рис. 5. Корреляционная функция (а) и спектральная плотность (б) случайного процесса сложной структуры



Таблица 3. Параметры узкополосных процессов

№ процесса	$D$	$w_c$ , рад/с	$\alpha$ , 1/с	$w_o$ , рад/с
1	0,04	8	–	–
2	0,1	10	–	–
3	0,02	–	0,5	–
5	0,07	–	0,8	30

### Библиографический список

1. Чернецкий, В. И. Анализ точности нелинейных систем управления / В. И. Чернецкий. – М.: Машиностроение, 1968. – 248 с.
2. Гусев, А. С. Расчет конструкций при случайных воздействиях / А. С. Гусев, В. А. Светлицкий. – М.: Машиностроение, 1984. – 240 с.
3. Дженкинс, Г. Спектральный анализ и его приложения / Г. Дженкинс, Д. Ватс. – М.: Мир, 1972. – Вып.2. – 287 с.

### Информация об авторах

**Перов Сергей Николаевич**, доцент кафедры прочности летательных аппаратов, кандидат технических наук, доцент; место работы: кафедра прочности летательных аппаратов Самарского государственного аэрокосмического университета; область научных интересов: надежность, динамика и прочность конструкций, механика разрушения, усталостное разрушение.

**Скворцов Юрий Васильевич**, доцент кафедры прочности летательных аппаратов, кандидат технических наук, доцент; место работы: кафедра прочности летательных аппаратов Самарского государственного аэрокосмического университета; область научных интересов: надежность, динамика и прочность конструкций, механика разрушения, метод конечных элементов.