УДК 510.5

МЕТОДИКА ВЫБОРА АЛГОРИТМОВ ОЦЕНИВАНИЯ СТЕПЕНИ СООТВЕТСТВИЯ ОБЪЕКТОВ ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ НАЗНАЧЕНИЮ С УЧЁТОМ ИХ ЭФФЕКТИВНОСТИ И МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

© 2008 В. В. Рыжаков[1], М. В. Кузнецова[1], М. В. Рыжаков[2]

[1]Пензенская государственная технологическая академия
[2]Московский физико-технический институт (государственный университет),
г. Долгопрудный Московской области

Проанализировано понятие алгоритма, и в качестве метода оценивания метрологических характеристик алгоритмов степени соответствия объектов функциональному назначению предложена и рассмотрена методика выбора алгоритмов на основе дисперсионного анализа. Исследованы различные алгоритмы.

Метрологическая характеристика, алгоритм, степень соответствия, качество, дисперсия, продукция, объект

Впервые системный подход как методологическая база исследования алгоритмов был предложен А. Черчем (США, 1936 г.) [1]. История развития ведёт к основополагающим работам отечественных ученых А. Н. Колмогорова и В. А. Успенского. Универсальный подход к моделированию алгоритмов, предложенный А. Н. Колмогоровым, позволил сделать вывод: имея любую модель алгоритма, можно синтезировать другие модели, «и поэтому основные понятия теории алгоритмов можно изложить в терминах функций... все известные в математике алгоритмы моделируются.... функциями» [2, 3].

В данной статье понятие алгоритм рассматривается как реальный объект, представленный моделью алгоритма степени соответствия в виде функций единичных показателей качества (соответствия), т.е. как функция вида $Q = f(g, S, m, n)$. Здесь g - весовые коэффициенты единичных показателей, S - единичные показатели соответствия, m - число показателей, n - объёмы статистик для определения показателей (в статье не используется).

Используется понятие алгоритма, а не функция оценивания. Это связано с тем, что в зависимости от корпоративных интересов разработчиков, заказчиков объектов весовые коэффициенты g могут изменяться по определённым зависимостям (функциям) от порядка ранжирования, т.е. могут вводиться дополнительные операции в процедуры вычисления Q.

Целью является разработка методики выбора (синтеза) алгоритмов оценивания качества - степени соответствия объектов функциональному назначению с учётом их эффективности и метрологических оценок параметров исследуемых объектов.

Под функциональным назначением понимается способность объектов выполнять те функции, которые закладывались при их разработке. Эти способности характеризуются набором параметров единичных показателей, которые имеют различную значимость (вес) при оценивании функционирования объектов.

Для того, чтобы объединить указанные параметры, характеризующие функциональное соответствие объектов, в один показатель, который назовём степенью соответствия, что означает «степень, с которой совокупность собственных характеристик выполняет требования...», предлагается выбрать (синтезировать) соответствующий алгоритм после исследования его эффективности и метрологических характеристик, т.е. метрологических характеристик оценок соответствия, полученных на основе этого алгоритма.

Под эффективностью алгоритмов понимается их свойство, которое определяется величинами дисперсий получаемых оценок соответствия: меньше дисперсия (по сравнению с дисперсиями оценок, полученных на основе других алгоритмов) - выше эффективность данного алгоритма, и наоборот.

Метрологические характеристики алгоритма предлагается выражать или дисперсиями оценок показателей соответствия (качества), вызванных дисперсиями оценивания параметров объектов, или средними квадратическими отклонениями параметров объектов.

При оценивании эффективности предлагается принимать одни и те же предельные вариации (изменения) параметров для оценивания метрологических характеристик - фактические погрешности (дисперсии) результатов измерения (контроля) тех же параметров.

Изложенная методология позволяет разрешить существующее в настоящее время противоречие, которое сводится к следующему. Известен ряд алгоритмов (критериев) определения степени соответствия, но обоснованно выбрать из их числа более соответствующий затруднительно, поскольку не исследованы эффективность, несмещённость, а также метрологические свойства.

Известные работы имеют ограниченную информацию и являются недостаточными, а эксперименты на основе числовых таблиц Кадырова [5] являются неточными в связи с тем, что они далеки от идеалов.

Предлагается методика оценивания метрологических характеристик (дисперсий) комплексных показателей степени соответствия - выборочных средних и на их основе - оценивания эффективности алгоритмов и синтеза обобщённого алгоритма на основе комплексных алгоритмов по наиболее эффективной схеме (средней гармонической).

Новизна данного подхода состоит в том, что подобные (обобщённые) алгоритмы нивелируют мажорантность различных выборочных средних, тем самым снижая смещённость оценок показателей степени соответствия показателя и устраняя одну из сторон указанного противоречия.

Всё отмеченное позволяет получить более точные и несмещённые оценки степени соответствия объектов функциональному назначению, а значит, и получить возможность более обоснованного выбора продукции потребителем.

Рассмотрим методики через соответствующие аналитические выкладки.

В качестве метода оценивания указанных характеристик выбран дисперсионный анализ. На первом этапе используем его для комплексных структур алгоритмов, а затем конкретизируем.

Алгоритмы выборочных средних в обобщённой форме представляются в виде [6]

$$\hat{Q}_k = \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{S_i^k}{m} \right)^{\frac{1}{k}}, \qquad (1)$$

где S_i - i-ый единичный показатель соответствия, $i \in \{1,2,\ldots m\}$; m - число единичных показателей соответствия; $k \in \{-1;0;1;2\}$; $k = -1$ соответствует средней гармонической, $k = 0$ - средней геометрической, $k = 1$ - средней арифметической, $k = 2$ - средней квадратической оценкам.

Все единичные показатели носят случайный характер и определяются [7]

$$S_i = \frac{F_i}{F_{iэ}}, \qquad (2)$$

где F_i - результат измерения i -ой характеристики (параметра) продукции; $F_{iэ}$ - ее эталонное значение.

Значения F_i и S_i являются параметрами модели алгоритма (1). Так как F_i может быть физической величиной, значение которой определяется на основе прямых измерений, то $S_i(F_i)$ имеет погрешность [8]. В связи с этим для оценивания эффективности и метрологических характеристик рассматриваемых алгоритмов необходимо использовать информацию, связанную с чувствительностями к единичным показателям и с соответствующими дисперсиями.

Для определения указанных чувствительностей воспользуемся производными

$\partial \hat{Q}'_k \big/ \partial S_i$, а для оценивания эффективности и погрешности $\hat{Q}_k$ – дисперсионным подходом. В этом случае можно использовать непосредственно значение дисперсии $D\left(\hat{Q}_k\right)$, полученное на основе знания оценок дисперсий единичных показателей S_i. Далее по известным $D\left(\hat{Q}_k\right)$ можно получить значение среднеквадратической погрешности $\sigma\left(\hat{Q}_k\right)$.

Так как S_i - независимые случайные величины, $D\left(\hat{Q}_k\right)$ можно выразить следующим образом:

$$D\left(\hat{Q}_k\right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\hat{Q}'_{kS_i}\right)^2 D\left(S_i\right), \qquad (3)$$

где $\hat{Q}'_{kS_i}$ - чувствительности алгоритма $\hat{Q}_k$ к S_i.

В зависимости от k чувствительности $\hat{Q}'_{kS_i}$ будут существенно различаться. Определим их для всех k и в соответствии с (1) представим $\hat{Q}'_{kS_i}$ в виде

$$\hat{Q}'_{kS_i} = \frac{1}{k}\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{S_i^k}{m}\right)^{\frac{1}{k}-1} \cdot \frac{k}{m} \cdot S_i^{k-1} = \frac{1}{m} \cdot S_i^{k-1}\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{S_i^k}{m}\right)^{\frac{1}{k}-1}. \qquad (4)$$

Конкретно для каждого k выражение (4) можно преобразовать:

для $k = -1$

$$\hat{Q}'_{-1S_i} = \frac{1}{m} \cdot S_i^{-2}\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{S_i^{-1}}{m}\right)^{-2} = \frac{m}{S_i^2\left(\sum\limits_{i=1}^{m} \frac{1}{S_i}\right)^2}; \qquad (5)$$

для $k = 0$

$$\hat{Q}'_{0S_i} = \frac{\left(\prod\limits_{i=1}^{m} S_i\right)^{\frac{1}{m}}}{m \cdot S_i}; \qquad (6)$$

для $k = 1$

$$\hat{Q}'_{1S_i} = \frac{1}{m}; \qquad (7)$$

для $k = 2$

$$\hat{Q}'_{2S_i} = \frac{1}{m} \cdot S_i^{2-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{S_i^2}{m}\right)^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{m} \cdot \frac{S_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} S_i^2 \big/ m}} = \frac{S_i}{\sqrt{m\sum\limits_{i=1}^{m} S_i^2}}. \qquad (8)$$

Таким образом, обобщённая форма алгоритмов выборочных средних (1) позволяет достаточно просто получить выражения чувствительностей (5)-(8) различных видов алгоритмов к единичным показателям качества S_i.

В выражении (3) остаются неизвестными величины дисперсий $D\left(S_i\right)$, и поэтому оценим их.

В общем виде единичный показатель S_i в (3) может быть представлен как взвешенная величина с учетом весовых коэффициентов и единичных показателей качества (2)

$$S_{iв} = g_i \cdot S_i = g_i \cdot \left(\frac{F_i}{F_{iэ}}\right), \qquad (9)$$

где g_i - весовой коэффициент (коэффициент важности) единичного показателя S_i в алгоритме вида (1).

В связи с тем, что g_i и $F_{iэ}$ назначают эксперты, то они могут быть заданы с определёнными ошибками и, следовательно, вносить в силу своих вариаций определённый вклад в дисперсию значений $\hat{Q}_k$ [9].

С учётом (9) и статистической независимости $g_i, F_i, F_{iэ}$ общий вид $D\left(S_{iв}\right)$ можно определить следующим образом:

$$D\left(S_{iв}\right) = \left(\frac{g_i}{F_{iэ}}\right)^2 \cdot D\left(F_i\right) + \left(\frac{g_i \cdot F_i}{F_{iэ}^2}\right)^2 \cdot D\left(F_{iэ}\right) + \left(\frac{F_i}{F_{iэ}}\right)^2 \cdot D\left(g_i\right), \qquad (10)$$

где $D(F_i), D(F_{iэ}), D(g_i)$ - соответственно дисперсии $F_i, F_{iэ}$ и g_i.

При прямых измерениях параметров F_i дисперсия $D(F_i)$ будет определяться совокупностью погрешностей, которые присущи средствам измерения (СИ). В этом случае, если класс точности СИ указан в виде дроби $\gamma_k/\gamma_н$, где γ_k - приведенная к пределу измерения погрешность в конце, а $\gamma_н$ - приведенная погрешность в начале диапазона измерения F_i, то дисперсию F_i можем представить так:

$$D(F_i) = \left(\frac{\gamma_{нi} \cdot F_{ik}}{100}\right)^2 + \left[\frac{(\gamma_{ki} - \gamma_{нi}) \cdot F_i}{100}\right]^2, \qquad (11)$$

где F_{ik} - предел измерения СИ.

Аналогично оценивается дисперсия $D(F_i)$ при задании класса точности СИ в виде γ_S и $\gamma_н$:

$$D(F_i) = \left(\frac{\gamma_S \cdot F_i}{100}\right)^2; \qquad (11а)$$

$$D(F_i) = \left(\frac{\gamma_н \cdot F_i}{100}\right)^2. \qquad (11б)$$

Как указывалось выше, значение $F_{iэ}$ представлено эталоном. Оно чаще всего носит виртуальный характер, и поэтому погрешность будет иметь одновременно систематический для всей совокупности проверяемой продукции и случайный характер выбора.

При экспертном методе задания $F_{iэ}$ дисперсию $D(F_{iэ})$ можно оценить так:

$$D(F_{iэ}) = \frac{1}{J-1}\sum_{j=1}^{J}\left(F_{ijэ} - \overline{F}_{iэ}\right)^2, \qquad (12)$$

где J - число экспертов; $\overline{F}_{iэ} = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} F_{ijэ}$; $F_{ijэ}$ - оценка j-го эксперта $F_{iэ}$-го параметра эталона.

В выражении (10) осталось оценить $D(g_i)$ - дисперсию g_i весового коэффициента F_i параметра продукции. В качестве приближения $D(g_i)$ можно рекомендовать $\pm\gamma\%$ -ое предельное колебание коэффициента от его номинального значения. Если в качестве номинального значения выбрать

$$g_i = \frac{1}{m}, \qquad (13)$$

то при равномерном распределении g_i значения в интервале

$$\left[\left(1 - \frac{\gamma}{100}\right)\cdot\frac{1}{m}; \left(1 + \frac{\gamma}{100}\right)\cdot\frac{1}{m}\right]$$

дисперсию $D(g_i)$ можно выразить так:

$$D(g_i) = \frac{1}{3}\left(\frac{\gamma}{100}\right)^2 \cdot \frac{1}{m^2}. \qquad (14)$$

Особенность выбора указанного коэффициента в том, что, если происходит завышение (занижение) g_i коэффициента, на столько же произойдёт занижение (завышение) соответственно весовых коэффициентов других параметров продукции (по причине необходимого соблюдения условия нормировки $\left(\sum_{i=1}^{m} g_i = 1\right)$). Этот же вывод подтвердился и численным экспериментом [5]. Указанная вариация g_i скажется существенно в том случае, если вариация единичных показателей степени соответствия $(F_i/F_{iэ})$ также происходит в широких пределах. Но это возможно только на этапах отработки объектов (продукции) при налаживании производства. В других случаях влиянием вариаций g_i можно пренебречь.

Рассмотрим правила оценивания g_k. В связи с тем, что в оценках $\hat{Q}_k$ учитываются весьма разнообразные свойства объектов, при решении данной задачи (оценивания g_k) необходимо иметь и соответствующий банк специалистов-экспертов. При этом допустима избыточность, которая позволит снизить дисперсию (14). Для лучшей ориентации в свойствах исследуемых объектов целесообразно использовать их рубрикаторы, которые должны быть заранее составлены, подготовлены. Указанная избыточность числа экспертов желательна и для того, чтобы нивелировать различные (ограниченные) знания и опыт экспертов, которые сказываются в отличии составленных различными экспертами ранжировок показателей соответствия друг от друга, а значит и повысить точность оценивания g_i. Указанная статистическая тенденция и позволит снизить γ-предельное колебание оценок g_i.

Расчёты дисперсий по (3) с $\hat{Q}_k$ при $k \in \{-1,0,1,2\}$ и при одних и тех же дисперсиях S_i показали, что минимальной дисперсией, т.е. наибольшей эффективностью, обладает $\hat{Q}_k$ при k = -1 [9].

В связи с этим предложено на основе нечёткой логики [2] выражение обобщённого гармонического алгоритма $\overline{Q}_{ОГ}$, как наиболее эффективного и менее смещённого, позволяющего нивелировать мажорантность $\hat{Q}_{-1}, \hat{Q}_0, \hat{Q}_1, \hat{Q}_2$:

$$\overline{Q}_{ОГ} = \frac{\dfrac{1}{\hat{Q}_{-1}} + \dfrac{1}{\hat{Q}_0} + \dfrac{1}{\hat{Q}_1} + \dfrac{1}{\hat{Q}_2}}{\dfrac{1}{\hat{Q}_{-1}^2} + \dfrac{1}{\hat{Q}_0^2} + \dfrac{1}{\hat{Q}_1^2} + \dfrac{1}{\hat{Q}_2^2}}, \tag{15}$$

где $\hat{Q}_{-1}, \hat{Q}_0, \hat{Q}_1, \hat{Q}_2$ - оценки комплексных выборочных средних гармонической, геометрической, арифметической, квадратической; k - номер выборочной средней, $k \in (-1,0,1,2)$.

Число выборочных средних можно менять путём учёта и других видов.

Для того, чтобы определить дисперсию $\overline{Q}_{ОГ}$, обусловленную дисперсиями оценок $\hat{Q}_{-1}, \hat{Q}_0, \hat{Q}_1, \hat{Q}_2$, необходимо найти чувствительности $\overline{Q}'_{ОГ\hat{Q}_{-1}}$; $\overline{Q}'_{ОГ\hat{Q}_0}$; $\overline{Q}'_{ОГ\hat{Q}_1}$;. $\overline{Q}'_{ОГ\hat{Q}_2}$.

Из выражения (1) с учётом (15) в соответствии с (3) путем несложных преобразований получим оценку дисперсии обобщённого гармонического алгоритма:

$$D(\overline{Q}_{ОГ}) = \sum_k \left(Q'_{ОГ\hat{Q}_k}\right)^2 \cdot D(\hat{Q}_k), \tag{16}$$

где $k \in \{-1,0,1,2\}$.

В развёрнутом виде (16) можно записать

$$D(\overline{Q}_{мд}) = D_1(Q_{мд}(\hat{Q}_{-1})) + D_2(Q_{мд}(\hat{Q}_0)) + \\ + D_3(Q_{мд}(\hat{Q}_1)) + D_4(Q_{мд}(\hat{Q}_2)),$$

где $D_1(Q_{ОГ}(\hat{Q}_{-1})) = \dfrac{\left(\dfrac{1}{\hat{Q}_{-1}^2}\right)^2 \cdot D(\hat{Q}_{-1})}{\left(\dfrac{1}{\hat{Q}_{-1}^2} + \dfrac{1}{\hat{Q}_0^2} + \dfrac{1}{\hat{Q}_1^2} + \dfrac{1}{\hat{Q}_2^2}\right)^2}$;

$$D_2(Q_{ОГ}(\hat{Q}_0)) = \frac{\left(\dfrac{1}{\hat{Q}_0^2}\right)^2 \cdot D(\hat{Q}_0)}{\left(\dfrac{1}{\hat{Q}_{-1}^2} + \dfrac{1}{\hat{Q}_0^2} + \dfrac{1}{\hat{Q}_1^2} + \dfrac{1}{\hat{Q}_2^2}\right)^2};$$

$$D_3(Q_{ОГ}(\hat{Q}_1)) = \frac{\left(\dfrac{1}{\hat{Q}_1^2}\right)^2 \cdot D(\hat{Q}_1)}{\left(\dfrac{1}{\hat{Q}_{-1}^2} + \dfrac{1}{\hat{Q}_0^2} + \dfrac{1}{\hat{Q}_1^2} + \dfrac{1}{\hat{Q}_2^2}\right)^2};$$

$$D_4(Q_{ОГ}(\hat{Q}_2)) = \frac{\left(\dfrac{1}{\hat{Q}_2^2}\right)^2 \cdot D(\hat{Q}_2)}{\left(\dfrac{1}{\hat{Q}_{-1}^2} + \dfrac{1}{\hat{Q}_0^2} + \dfrac{1}{\hat{Q}_1^2} + \dfrac{1}{\hat{Q}_2^2}\right)^2}.$$

Таким образом, предложенный дисперсионный подход к исследованию позволяет получить обоснованные рекомендации по выбору лучших из известных алгоритмов (по характеристикам несмещённости и эффективности) для использования в системах оценивания качества. Разработанный инструментарий представляет необходимые средства для разработки конкурентоспособных образцов продукции в соответствии с актуальными техническими требованиями и рекомендациями по их реализации.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 08-08-0619.

Библиографический список

1. Математика и кибернетика в экономике. Словарь – справочник./ Сост. Н. Н. Гонтарова, М. Б. Немчикова, А. А. Попова. - М.: Издательство «Экономика», 1975.

2. Колмогоров, А. Н. О понятии алгоритма // Успехи математических наук. - 1953. - №8: 4(56). - С. 175-176.

3. Колмогоров, А. Н. К определению алгоритма /А. Н. Колмогоров, В. А. Успенский // Успехи математических наук. - 1958. - №3:6. - С. 3-28.

4. ГОСТ Р ИСО 9000-2001. Системы менеджмента качества. Основные положения и словарь. - М.: ИПК Изд-во стандартов, 2001.

5. Портнова, И. М. Количественное оценивание качества продукции в радиоэлектронной аппаратуре (модемы): Диссертация на соискание ученой степени к.т.н. по специальности 05.23.02. - Пенза, ПГТА.- 2005. - 190 с.

6. Ефремова, М. Р. Общая теория статистки. 2-е издание./ М. Р. Ефремова, Е. В. Петрова, В. Н. Румянцев. - М.: ИНФРА-М., 1999 г.

7. Основы оценивания качества продукции./ Учебное пособие под ред. д.т.н., профессора В. В. Рыжакова. - Пенза, ПТИ. - 2001.

8. РМГ 29-99. Метрология. Основные термины и определения.

9. Рыжаков, В.В., Рыжаков М.В., Рыжаков К.В. Исследование метрологических характеристик алгоритмов измерения качества продукции./ В. В. Рыжаков, М. В. Рыжаков, К. В. Рыжаков // Метрология, приложение к научно-техническому журналу «Измерительная техника». - 2005, №3. - С. 11-20.

Информация об авторах

Рыжаков Виктор Васильевич, заведующий кафедрой «Техническое управление качеством», Пензенская государственная технологическая академия.

Кузнецова Марина Владимировна, начальник отдела научных исследований, Пензенская государственная технологическая академия, аспирантка.

Рыжаков Михаил Викторович, старший преподаватель Московского физико-технического института (государственного университета), г. Долгопрудный Московской области.