УДК 517.5

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА КАЧМАЖА

© 2008 А.А. Иванов

Самарский государственный аэрокосмический университет

Дается описание классического итерационного метода Качмажа и его модификации с использованием релаксационного параметра. Исследуется скорость сходимости метода Качмажа с релаксационным параметром применительно к задаче наименьших квадратов большой размерности. Даются рекомендации по выбору релаксационного параметра для частного случая – задача аппроксимации экспериментальных данных полиномиальными зависимостями в смысле наименьших квадратов.

Итерационные методы, метод наименьших квадратов, переопределенные системы, метод Качмажа, полиномиальная аппроксимация, параметр релаксации

Введение

Многие задачи вычислительной математики сводятся, в конечном счете, к решению систем линейных алгебраических уравнений. Чаще такие системы получаются переопределенными и имеют большие размерности. Применение прямых методов для решения подобных задач требует существенных затрат памяти и иных вычислительных ресурсов ЭВМ.

Для многих практических задач вычислительной математики требуется решение задачи полиномиальной аппроксимации в смысле метода наименьших квадратов (МНК). Применение известных итерационных методов для решения данного класса задач сопряжено с очень низкой скоростью сходимости, которая вызвана плохой обусловленностью данной задачи.

Итерационный метод Качмажа

В работе [1] математиком С. Качмажем *(Stefan Kaczmarz)* был предложен итерационный метод (относящийся к классу проекционных) решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с квадратной невырожденной матрицей:

$$A\cdot u = f,\ \ A\in \mathbb{R}^{n\times n},\ \ f\in \mathbb{R}^{n},\ \ \det A\neq 0. \qquad (1)$$

Суть этого метода состоит в последовательном ортогональном проектировании приближения на гиперплоскости $(A_i,u), i=1,2,\ldots,n$, где A_i - строки матрицы.

Итерационная последовательность в соответствии с этим алгоритмом определяется рекуррентной формулой

$$u_k^i = u_k^{i-1} + A_i^T \cdot \frac{f_i-\left(A_i,u_k^{i-1}\right)}{\|A_i\|_2},$$
$$i=1,2,\ldots,n, k=1,2,\ldots, \qquad (2)$$
$$u_{k+1}^0 = u_k^n.$$

где k - номер внешней итерации, i - номер внутренней, а T - символ транспонирования.

В качестве критерия остановки итерационного процесса (2) часто выбирают критерий

$$\delta = \frac{\left\|u_{k+1}^0-u_k^0\right\|_2}{\left\|u_k^0\right\|_2} \le \Delta. \qquad (3)$$

Одним из первых практических применений итерационного метода Качмажа к решению задачи наименьших квадратов (переопределенных СЛАУ) является компьютерная томография [2,3].

Рассматриваемый метод был исследован Гордоном *(R. Gordon)* в работе [2], после чего стал известен как ART метод *(Algebraic Reconstruction technique)*. Подробное описание данной технологии можно найти в фундаментальной работе [3].

В [4] показано, что в случае переопределенных систем полного ранга (4) итерационная последовательность (2) сходится к псевдорешению (5) при любом начальном приближении, т.е. когда

$$A \cdot u = f,\ A \in \mathbb{R}^{m \times n},\ u \in \mathbb{R}^{n},\ f \in \mathbb{R}^{m},$$
$$m > n,\ \forall i = 1, 2, \ldots, m \quad A_i \neq \theta, \tag{4}$$

где θ - нулевой вектор,

$$u_* = \left(A^T \cdot A\right)^{-1} \cdot A^T \cdot f, rank\left(A\right) = n. \tag{5}$$

Итерационный метод Качмажа с параметром релаксации

Для итерационного метода Качмажа до сих пор отсутствуют теоретические результаты о его скорости сходимости. Более того, при решении ряда практических задач данный метод имеет неудовлетворительную (низкую) скорость сходимости.

Для ее улучшения предлагается введение в алгоритм (2) релаксационного параметра ω. В этом случае итерационная последовательность (2) преобразуется к виду:

$$u_k^i = u_k^{i-1} + \omega \cdot A_i^T \cdot \frac{f_i - \left(A_i, u_k^{i-1}\right)}{\left\|A_i\right\|_2},$$
$$i = 1, 2, \ldots, m, k = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$
$$u_{k+1}^0 = u_k^n.$$

В [4] доказано, что данная последовательность сходится к псевдорешению (5), если $\omega \in \left(0; 2\right)$. Однако не дается никаких рекомендаций по практическому выбору параметра ω.

Описание модельной задачи

Представленные здесь алгоритмы были реализованы в свободно распространяемом математическом пакете SciLab.

В качестве модельной задачи была выбрана задача полиномиальной аппроксимации достаточно большой размерности:

$$A \cdot u = f,\ A \in \mathbb{R}^{1001 \times 5},\ u \in \mathbb{R}^{5},\ f \in \mathbb{R}^{1001}, \tag{7}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t_0 & \ldots & t_0^4 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & t_{1000} & \ldots & t_{1000}^4 \end{pmatrix}, \tag{8}$$
$$t_i = i \cdot 10^{-2}, i = \overline{0,10}.$$

Число обусловленности этой матрицы велико и равно 29064.

При вычислительном эксперименте необходимо знать точное псевдорешение системы (7), которое используется в дальнейшем для контроля погрешности.

В эксперименте был выбран вектор $\vec{u} = \left(1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5\right)^T$. Поскольку часто при измерениях возникают неустранимые погрешности, то пусть $f = A \cdot \vec{u} + \xi$, где $\xi \in \mathbb{R}^n$ - некоторый случайный вектор (невязка), компоненты которого распределены равномерно в интервале $(0;1)$ и $M\left[\xi\right] = 0,5$, а $D\left[\xi\right] = \dfrac{1}{12}$.

Тогда точным псевдорешением системы (7) будет вектор $u = A^+ \cdot f$.

Здесь псевдообратная матрица A^+ вычисляется средствами пакета SciLab.

Результаты вычислительного эксперимента

Очевидно, при релаксационном параметре $\omega = 1$ итерационная последовательность (6) соответствует классическому методу Качмажа. В эксперименте было выбрано $\Delta = 0,001$.

Тогда, используя итерационную последовательность (2), необходимо провести всего 34 итерации.

Данное число итераций возможно уменьшить, если применять метод Качмажа с релаксационным параметром.

В таблице 1 показано, каким образом изменяется число итераций для алгоритма (6) в зависимости от значения ω.

Численный эксперимент показывает, что при $\omega = 0,015$ происходит уменьшение числа итераций на 41%.

Рассмотрим задачу большей размерности, а именно:

$$A \cdot u = f, A \in \mathbb{R}^{10001 \times 1}, u \in \mathbb{R}^{5}, f \in \mathbb{R}^{10001}, \tag{9}$$

где матрица A строится аналогично (8).

При $\omega = 1$ количество итераций для решения такой задачи равно также k=35.

Отметим интересную особенность метода Качмажа – *сильное увеличение размер-*

ности задачи слабо сказывается на числе необходимых итераций.

Если $\omega = 0{,}0015$, то число итераций равно всего k=21.

Таблица 1. Количество итераций для построчного метода Качмажа

Значение параметра релаксации	Количество итераций	Улучшение
1,500	34	0,00%
1,000	34	0,00%
0,900	34	0,00%
0,800	34	0,00%
0,700	35	-2,94%
0,600	35	-2,94%
0,100	35	-2,94%
0,090	35	-2,94%
0,030	33	2,94%
0,020	29	14,71%
0,015	20	41,18%
0,010	22	35,29%
0,009	23	32,35%
0,001	89	-161,76%

Из вышеприведенных результатов можно сделать вывод о том, что при

$$\omega : \frac{10}{m} \qquad (10)$$

происходит уменьшение числа итераций применительно к задаче полиномиальной аппроксимации.

Было проведено около 100 экспериментов для задач рассматриваемого типа разных размерностей, результаты которых подтверждают сделанный вывод (10).

Более того, была рассмотрена задача полиномиальной аппроксимации с числом строк 100000. При $\omega = 1$ число итераций составило 34, а при использовании рекомендации (10) всего 9.

При малых размерностях $m : 100$ не имеет особого смысла применять метод с релаксационным параметром, так как и при $\omega = 1$ число итераций не столь велико. А применение рекомендации (10) может не дать ожидаемого уменьшения числа итераций, а, наоборот, увеличить их.

Заключение

В работе проведено экспериментальное исследование метода Качмажа применительно к задаче полиномиальной аппроксимации в смысле МНК. Дается рекомендация по выбору релаксационного параметра ω.

Рассматриваемые в работе модельные задачи представляют серьезную сложность при решении их прямыми или известными итерационными методами.

Показано, что алгоритм Качмажа и особенно его модифицированная форма позволяют эффективно решать задачи полиномиальной аппроксимации в смысле МНК. Таким образом, данный подход может найти широкое применение при решении многочисленных задач математического моделирования.

Метод Качмажа является очень перспективным среди других итерационных методов решения задач больших размерностей, хотя и нуждается в дополнительных теоретических и практических исследованиях.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке гранта для молодых исследователей НОЦ SA-014-02 «Математические основы дифракционной оптики и обработки изображений».

Библиографический список

1. **Kaczmarz, S.** Approximate solution of systems of linear equations [текст] / Kaczmarz S. // Internat. J. Control. – 1993. – V. 57, N 6. – P. 1269–1271.

2. **Gordon, R.** Reconstruction of pictures from their projections [текст] / R. Gordon, G. Herman // Communications of the ACM. – 1971. – V. 14, N 12. – P. 759-768.

3. **Avinash, C. Kak** Principles of computerized tomographic imaging [текст] / C. Kak Avinash, Slaney Malkolm // IEEE PRESS, 1987. – 329 p.

4. **Ильин, В.П.** Об итерационном методе Качмажа и его обобщениях [текст] / В.П. Ильин // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2006. – Т. 9, №3.

Сведения об авторе

Иванов Андрей Александрович, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева, студент. Область научных интересов – математическое моделирование.