УДК 532.526

ПРИМЕНЕНИЕ СХЕМЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ С РАЗНЫМИ ШАГАМИ В МЕТОДЕ РАСЩЕПЛЕНИЯ ЗАВИХРЁННОСТИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО СЛЕДА ЗА ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНОЙ

© 2008 В.В. Никонов, В.Г. Шахов

Самарский государственный аэрокосмический университет

Рассматривается применение метода расщепления завихрённости к моделированию аэродинамического следа за продольно обтекаемой плоской пластиной. Применяется схема интегрирования с разными шагами по времени с учетом разности скоростей протекания процессов диффузии и конвекции. Показано, что схема метода позволяет получать результаты с хорошей точностью в широком диапазоне изменения чисел Рейнольдса.

Обтекание, прямое численное моделирование, метод расщепления завихрённости, аэродинамический след, плоская пластина, диффузия, конвекция, интегрирование с разными шагами по времени, число Рейнольдса

1. Математическая формулировка метода расщепления завихрённости

Метод расщепления завихрённости (МРЗ) был получен из метода «вихрь в ячейке» путём расщепления завихрённости на её составляющие [1]. В МРЗ вместо циркуляции вихрей в ячейках используются величины

$$\Delta_{uy}(x_i, y_j) = \int_{x_i-h/2}^{x_i+h/2} \int_{y_j-h/2}^{y_j+h/2} \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

$$\Delta_{vx}(x_i, y_j) = \int_{x_i-h/2}^{x_i+h/2} \int_{y_j-h/2}^{y_j+h/2} \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

где h – размер ячейки однородной сетки.

Скорость течения рассчитывается интегрированием вдоль координатных линий, и при этом двумерная задача сводится к нескольким одномерным:

$$u(i,\ j+0,5) = u(i,\ j-0,5) + \frac{\Delta_{uy}(i,j)}{h_x},$$

$$v(i+0,5,\ \ j) = v(i-0,5,\ \ j)_E + \frac{\Delta_{vx}(i,j)}{h_y}.$$

Скорость в центрах ячеек сетки рассчитывается следующим образом:

$$u(i,j) = u(i,\ j-0,5) + 0,5\Delta_{uy}\frac{(i,j)}{h_x},$$

$$v(i,j) = v(i-0,5,\ j) + 0,5\Delta_{vx}\frac{(i,j)}{h_y}.$$

В схеме метода МРЗ частицы движутся с потоком и переносят величины Δ_{vx} и Δ_{uy}. После расчёта поля скоростей течения новые координаты частиц получаются аналогично методу «вихрь в ячейке» численным интегрированием системы обыкновенных дифференциальных уравнений методом Эйлера. Новое местоположение частиц не обязательно совпадёт с координатами расчётной сетки, и поэтому процедура перераспределения используется отдельно для величин Δ_{vx} и Δ_{uy}:

$$\Delta_{uy}(x_i, y_j) = \Delta_{uy}(x_k, y_l)\Lambda(x_i - x_k)\Lambda(y_j - y_l),$$

$$\Delta_{vx}(x_i, y_j) = \Delta_{vx}(x_k, y_l)\Lambda(x_i - x_k)\Lambda(y_j - y_l). \quad (1)$$

В качестве интерполяционной функции Λ использовалась формула «облако в ячейке» [2].

Диффузия в свободном потоке для схемы МРЗ рассчитывается с использованием метода донор-акцептор (Д-А) аналогично [3], но отдельно для Δ_{uy} и Δ_{vx}:

$$\Delta_{uy}(t+{}_{\Delta}t, x_i, y_j) = \Delta_{uy}(t, x_i, y_j) + \sum_{j-n_d \le q \le j+n_d} \Big(\Delta_{uy}(t, x_i, y_q) G^*_{jq}(y) - \Delta_{uy}(t, x_i, y_j) G^*_{qj}(y)\Big),$$

$$\Delta_{vx}(t+{}_{\Delta}t, x_i, y_j) = \Delta_{vx}(t, x_i, y_j) + \sum_{i-n_d \le q \le i+n_d} \Big(\Delta_{vx}(t, x_q, y_j) G^*_{iq}(x) - \Delta_{vx}(t, x_q, y_j) G^*_{qi}(x)\Big),$$

где n_d - радиус «диффузионной молекулы», а коэффициенты G^*_{jq} определяются по формуле

$$G^*_{pq}(z) = \frac{1}{2}\left[erf\left(\frac{z_p + h/2 - z_q}{\sqrt{4\nu_\Delta t}} \right) - \right.$$
$$\left. - erf\left(\frac{z_p - h/2 - z_q}{\sqrt{4\nu_\Delta t}} \right) \right].$$

Здесь z – x_p– или y_p–координаты центра ячейки p-го вихря, erf – интеграл вероятности (функция ошибок).

В схеме МРЗ с поверхности тела диффундируют величины Δ_{uy} и Δ_{vx}. Для удобства сначала определим Δ_{un} и Δ_{vs} в системе координат, связанной с панелью:

$$\Delta_{un}(s_i, n_j) = u(s_i, +0) h_s \times$$
$$\times \left[erf\left(\frac{n_j + h/2}{\sqrt{4\nu_\Delta t}} \right) - erf\left(\frac{n_j - h/2}{\sqrt{4\nu_\Delta t}} \right) \right],$$

$$\Delta_{vs}(s_i, n_j) = 0,$$

где h_s – размер ячейки локальной сетки в направлении координаты s, (s_i, n_j) – координаты центра рассматриваемой ячейки в локальной системе координат (СК). Величины Δ_{uy} и Δ_{vx} в глобальной СК запишутся как

$$\Delta_{uy}(x_i, y_j) = \Delta_{un}(s_i, n_j)\ y_n,$$
$$\Delta_{vx}(x_i, y_j) = \Delta_{un}(s_i, n_j)\ x_n. \qquad (2)$$

Здесь (x_i, y_j) - координаты центра рассматриваемой ячейки в глобальной СК, $\{x_n, y_n\}$ - единичный вектор, нормальный к рассматриваемой панели, записанный в этой же системе. Величина скорости жидкости у поверхности тела определяется следующим образом:

$$u(s_i, +0) = \lim_{n \to +0} u(s_i, n),$$

В общем случае координаты (x_i, y_j) в (2) не обязательно совпадают с ячейками глобальной сетки. Поэтому для значений Δ_{uy} и Δ_{vx} применяется процедура перераспределения (1).

Для учёта уравнения неразрывности в схему метода необходимо включить корректировку поля скорости. Тогда для расположенных над пластиной ячеек вертикальная компонента скорости определится как

$$v_{i,j} = v_{i,j-1} - 0.5 h_y \left(\left\langle \frac{\partial u}{\partial x} \right\rangle_{i,j} + \left\langle \frac{\partial u}{\partial x} \right\rangle_{i,j-1} \right). \qquad (3)$$

Для аппроксимации пространственных производных в правой части (3) использовалась центральная конечно-разностная схема.

В схеме метода процессы конвекции и диффузии рассматриваются отдельно на каждом шаге по времени. В работе [4] было показано, что для достижения заданной точности шаг по времени для метода Д-А определяется следующим соотношением:

$$_\Delta t = k_d\, h^2 / \nu,$$

где k_d - константа, зависящая только от радиуса n_d «диффузионной молекулы», и для $n_d = 1$ эта константа находится в диапазоне $0.2 \le k_d \le 0.21$. Принято, что $k_d = 0.21$, так как в данном случае [5] ошибки методов Д-А и моделирования процесса конвекции будут иметь разные знаки и поэтому будут компенсировать друг друга. Шаг по времени для процесса конвекции определялся с помощью неравенства

$$_\Delta t_c \le k_c \frac{h}{u_\infty},$$

соответствующего критерию Курант-Фридрих-Леви [6] с величиной коэффициента $k_c = 1.5$. При этом он не обязательно совпадёт с оптимальным шагом для расчёта процесса диффузии. Поэтому предлагается применять метод интегрирования с раздельными шагами по времени для процессов диффузии и конвекции.

2. Прямое численное моделирование аэродинамического следа за плоской пластиной

Рассматривается случай продольного обтекания плоской пластины конечной длины вязкой несжимаемой жидкостью. В результате прямого численного моделирования получены профили скорости в аэродинамическом следе за пластиной в диапазоне чисел Рейнольдса от 10 до 10^6, которые сравниваются с аналитическим решением Голдстейна [7] для сечений, расположенных на расстояниях: $x_1 = 0$; 0.0135; 0.108; 0.256 от задней кромки пластины. Полученные результаты представлены на рис. 1, 2.

Вертикальная безразмерная координата η_1 определяется следующим образом:

$$\eta_1 = y\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu\, l_1}}\,,$$

где l_1 – длина пластины, равная 1.0, так как она принималась за характерный размер.

Представленные результаты позволяют сделать вывод о том, что метод МРЗ применим не только для моделирования ламинарного пограничного слоя на плоской пластине [1], но и для моделирования аэродинамического следа за пластиной.

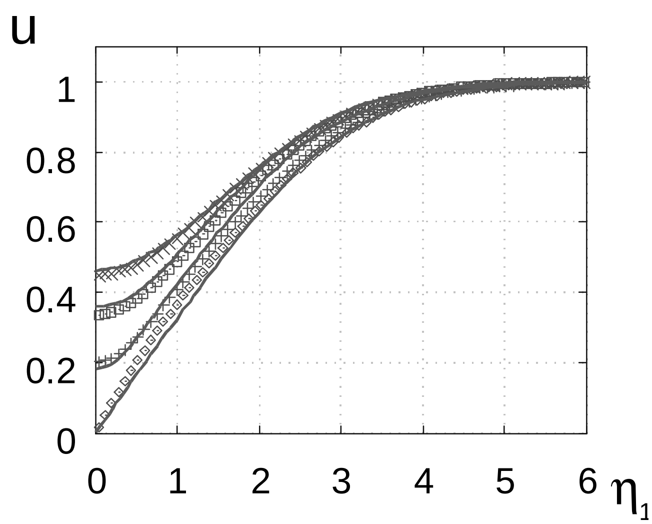

Рис. 1 Распределение продольной компоненты скорости u *в следе за плоской пластиной в сравнении с аналитическим решением (Re = 10, h = 0.025).*
Численное решение: ◇ *- x_1 » 0.0,* + *- x_1 » 0.0135,* □ *- x_1 » 0.108,* × *- x_1 » 0.256;*
- Голдстейн [7]

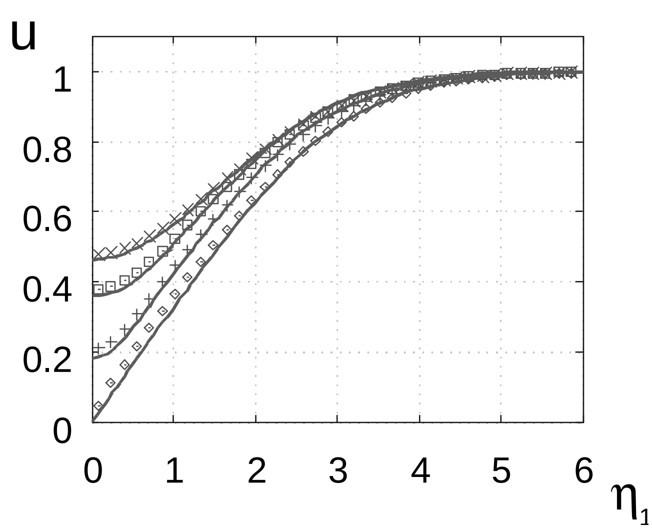

Рис. 2. Распределение продольной компоненты скорости u *в следе за плоской пластиной в сравнении с аналитическим решением (Re = 10^6, h = $1.563 \cdot 10^{-4}$).*
Численное решение: ◇ *- x_1 » 0.0,* + *- x_1 » 0.0135,* □ *- x_1 » 0.108,* × *- x_1 » 0.256;*
- Голдстейн [7]

Библиографический список

1. **Никонов, В.В.** Схема расчета скорости для метода «вихрь в ячейке» применительно к моделированию двумерного ламинарного пограничного слоя [Текст] / В.В. Никонов, В.Г. Шахов // Известия СНЦ РАН, Самара. – 2005. – Т. 7, № 2. – С. 392-398.

2. **Григорьев, Ю.Н.** Численные методы «частицы-в-ячейках» [Текст] / Ю.Н. Григорьев, В.А. Вшивков. – Новосибирск: Наука. – Сибирская издательская фирма РАН, 2000. - 184 с.

3. **Taranov, A.** Development of the Computational Vortex Method for Calculation of Two-Dimensional Ship Sections with Flow Separation [Текст] / A. Taranov, N. Kornev, A.Leder // Schiffbauforschung. – 2000. – Vol. 39, N 2. – P. 95-105.

4. **Nikonov, V.** The Ratio between Spatial and Time Resolutions for the Diffusion Substep in 2D Computational Vortex Methods [Текст] / V. Nikonov, N. Kornev, A. Leder // Schiffbauforschung. – 2002. – Vol. 41, N 3/4. – P. 5-12.

5. **Никонов, В.В.** Модификация схемы «донор-акцептор» для расчета диффузии завихренности и ее применение в методе «вихрь в ячейке» [Текст] / В.В. Никонов, В.Г. Шахов // Вестник СГАУ, Самара. – 2003. – № 1 (3). – С. 38-46.

6. **Ferziger, J.** Computational methods for fluid dynamics [Текст] / J. Ferziger, M. Peric, 3 rev. ed. – Springer-Verlag, 2002. – 423 p.

7. **Шлихтинг, Г.** Теория пограничного слоя [Текст] / Г. Шлихтинг; пер. с нем. Г.А. Вольперта; под. общ. ред. Л.Г. Лойцянского. – М.: Наука, 1974. - 712 с.

Сведения об авторах

Никонов Валерий Владимирович, инженер НТП «Авиатехнокон» СГАУ, кандидат технических наук. E-mail: v_nikonov@mail.ru. Область научных интересов: вихревые методы, прямое численное моделирование несжимаемых и сжимаемых течений, пограничный слой.

Шахов Валентин Гаврилович, заведующий кафедрой аэрогидродинамики СГАУ, профессор, кандидат технических наук. E-mail: shakhov@ssau.ru. Область научных интересов: теория пограничного слоя, турбулентность, численные методы, аэродинамика летательных аппаратов.