

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВИХРЕВЫХ ЛАЗЕРНЫХ ПУЧКОВ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ТОПОЛОГИЧЕСКИМ ЗАРЯДОМ В ГРАДИЕНТНОМ ПАРАБОЛИЧЕСКОМ ВОЛОКНЕ

© 2008 А.С. Стрилец

Самарский государственный аэрокосмический университет

В работе рассматривается распространение вихревых лазерных пучков $\exp\{i\mu\varphi\}$ в параболическом оптическом волокне. Зависимость комплексной амплитуды от поперечных координат и расстояния вдоль оптической оси описывается результатом действия интегрального оператора распространения в параболической среде на распределение амплитуды входного пучка. Этот оператор является аналогом интеграла Френеля, описывающего распространение параксиальных лазерных пучков в однородной среде. Результат действия интегрального оператора на вихревой пучок аналитически можно представить двумя способами. В первом случае ядром аналитического выражения для амплитуды является вырожденная гипергеометрическая функция. Вторым способом представления является композиция бесконечного числа мод Гаусса – Лагерра, которые являются собственными модами параболического волокна. Полученные аналитические выражения проверяются с помощью численного моделирования с использованием интегрального оператора и метода распространения световых пучков через тонкие линзы (реализован с использованием быстрого преобразования Фурье). Результаты численного моделирования согласуются с результатами вычислений аналитических выражений с точностью до погрешности метода.

Вихревые лазерные пучки, моды Гаусса-Лагерра, параболическое оптическое волокно, метод распространения световых пучков, параксиальный интегральный оператор распространения

Световые пучки с вихревой фазовой особенностью являются предметом пристального внимания уже более десяти лет [1]. Такие пучки часто используются в оптических твизерах для передачи орбитального углового момента захваченным микрообъектам [2]. Наиболее простым типом рассматриваемых пучков являются чистые оптические вихри. Формирование и распространение их в свободном пространстве достаточно хорошо исследовано [3].

Предмет исследования

В работе рассматривается распространение вихревого пучка Гаусса с произвольным начальным эффективным радиусом σ в параболическом волокне.

Комплексная амплитуда вихревого пучка описывается выражением

$$E_0(r, \varphi) = C_{0,0} \exp\left\{-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right\} \exp\{i\mu\varphi\}, \quad (1)$$

где $C_{0,0} = 1/(\sigma\sqrt{\pi})$ - нормировочный коэффициент, μ - произвольная вещественная константа.

Для показателя преломления градиентного параболического волокна справедливо соотношение

$$n^2(r) = n_0^2 \left(1 - 2\Delta \frac{r^2}{r_0^2}\right) = n_0^2 (1 - \alpha^2 r^2), \quad (2)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ - радиус цилиндрической системы координат; n_0 - показатель преломления на оптической оси волокна; r_0 - характерный радиус волокна; Δ - параметр дисперсии показателя преломления среды; $\alpha = \sqrt{2\Delta}/r_0$ - константа, определяющая кривизну профиля показателя преломления.

Целью работы является определение распределения комплексной амплитуды вихревого пучка на произвольном расстоянии вдоль оптической оси с использованием различных способов аналитического представления и методов численного моделирования.

Параксиальный интегральный оператор распространения в параболической среде

Комплексная амплитуда произвольного светового пучка в приближении Френеля для параболической среды при условии $\alpha r \ll 1$ определяется интегралом [4]:

$$\begin{aligned}
E(\rho, \theta, z) = & -\frac{ik\alpha}{2\pi \sin(\alpha z)} \times \\
& \times \exp\{ikz\} \exp\left\{\frac{ik\alpha}{2 \tan(\alpha z)} \rho^2\right\} \times \\
& \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(r, \varphi) \exp\left\{\frac{ik\alpha}{2 \tan(\alpha z)} r^2\right\} \times \\
& \times \exp\left\{-\frac{ik\alpha}{\sin(\alpha z)} \rho r \cos(\varphi - \theta)\right\} r dr d\varphi,
\end{aligned} \quad (3)$$

где $k = (2\pi/\lambda_0)n_0$ - волновое число в однородной среде с показателем преломления n_0 .

Распределение

$F(\rho, \theta, z) = E(\rho, \theta, z) \exp\{-ikz\}$ имеет период $z_T = 2\pi/\alpha$. При этом на полупериоде формируется перевернутое распределение $-E_0(\rho, \pi + \theta)$, а на четверти и трех четвертях - Фурье образы.

Действуя интегральным оператором (3) на вихревой пучок (1) для целых значений μ , можно получить аналитическое выражение, ядром которого является функция Кумера

$$\begin{aligned}
F(\rho, \theta, z) = & C_{0,0} 2^{\frac{|\mu|}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{|\mu|}{2} + 1\right)}{\Gamma(|\mu| + 1)} \frac{\sigma}{\sigma(z)} \times \\
& \times \left(1 + \frac{1}{\tan^2(\alpha z)} \frac{\sigma^4}{\sigma_0^4}\right)^{\frac{|\mu|}{4}} \left(\frac{\rho}{\sigma(z)}\right)^{|\mu|} \times \\
& \times \exp\left\{i\left(\frac{|\mu|}{2} + 1\right) \arctan\left(\frac{1}{\tan(\alpha z)} \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2}\right)\right\} \times \\
& \times \exp\left\{-i(|\mu| + 1) \frac{\pi}{2}\right\} \exp\{i\mu\theta\} \times \\
& \times \exp\left\{\frac{i}{2 \tan(\alpha z)} \frac{\rho^2}{\sigma_0^2}\right\} {}_1F_1\left\{\frac{|\mu|}{2} + 1; |\mu| + 1; \right. \\
& \left. -\frac{\rho^2}{2\sigma^2(z)} \left(1 + \frac{i}{\tan(\alpha z)} \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2}\right)\right\},
\end{aligned} \quad (4)$$

где $\sigma(z) = \sigma \sqrt{\cos^2(\alpha z) + \frac{\sigma_0^4}{\sigma^4} \sin^2(\alpha z)}$ - эффективный радиус пучка; $\sigma_0^2 = 1/k\alpha$ - квадрат

эффективного радиуса фундаментальной моды волокна.

Композиция мод Гаусса-Лагерра

Известно [5, 6], что решением уравнения Гельмгольца (3), конечным на оптической оси, в цилиндрических координатах является суперпозиция мод Гаусса-Лагерра (ГЛ)

$$\begin{aligned}
\Psi_{n,m}(r, \varphi, z) = & C_{n,m} \left(\frac{r}{\sigma_0}\right)^{|m|} \times \\
& \times L_n^{|m|} \left(\frac{r^2}{\sigma_0^2}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma_0^2}\right) \times \\
& \times \exp(im\varphi) \exp(\pm i\beta_{n,m}z),
\end{aligned} \quad (5)$$

где r, φ, z - цилиндрические координаты; n - неотрицательное целое число, m - целое число; $L_n^m(\xi) = \frac{1}{n!} e^\xi \xi^{-m} \frac{d^n}{d\xi^n} \{e^{-\xi} \xi^{n+m}\}$ - многочлены Лагерра.

В выражение (5) входят следующие параметры:

- 1) $\sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{k\alpha}}$ - эффективный радиус фундаментальной моды;
- 2) $\beta_{n,m} = k \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{k} (2n + |m| + 1)}$ - постоянная распространения;
- 3) $C_{n,m} = \frac{1}{\sigma_0} \sqrt{\frac{n!}{\pi(n + |m|)!}}$ - нормировочная константа.

Результатом действия интегрального оператора (3) на моды ГЛ (5) с произвольным начальным эффективным радиусом σ является выражение [4]:

$$\begin{aligned}
\Psi_{n,m}(r, \varphi, z) = & C_{n,m} \frac{\sigma}{\sigma(z)} \left(\frac{r}{\sigma(z)}\right)^{|m|} \times \\
& \times L_n^{|m|} \left(\frac{r^2}{\sigma^2(z)}\right) \times \exp\{i\beta_{n,m}(r, z) - \\
& - \frac{r^2}{2\sigma^2(z)} + im\varphi\},
\end{aligned} \quad (6)$$

где $\sigma(z)$ - эффективный радиус пучка - таковой же, как в выражении (4);

Таблица 1. Распределения интенсивности вихревого пучка для значений $\mu = 2$, $\sigma = \sigma_0$.

0	$\frac{1}{8} z_T$	$\frac{1}{4} z_T$	$\frac{3}{8} z_T$	$\frac{1}{2} z_T$

$$\beta_{n,m}(r, z) = kz + (2n + |m| + 1) \times$$

$$\times \left[\arctan \left\{ \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} \frac{1}{\tan(\alpha z)} \right\} - \frac{\pi}{2} \right] +$$

$$+ \left(1 - \frac{\sigma^2}{\sigma^2(z)} \right) \frac{1}{\tan(\alpha z)} \frac{r^2}{2\sigma_0^2} -$$

– функция, определяющая фазу $\Psi_{n,m}(r, \phi, z)$.

Благодаря тому, что система функций ГЛ образует полный ортонормированный базис, любое распределение комплексной амплитуды с конечной энергией может быть представлено в виде композиции мод ГЛ: $E(r, \phi, z) = \sum_{n,m} A_{n,m} \Psi_{n,m}(r, \phi, z)$ [5].

Коэффициенты композиции вихревого пучка определяются следующим образом:

$$A_{n,m} = \frac{\binom{|m|}{2}_n \Gamma\left(\frac{|m|}{2} + 1\right)}{\sqrt{(n + |m|)! n!}} \times$$

$$\times \frac{\exp\{2\pi i(\mu - m)\} - 1}{2\pi i(\mu - m)}, \quad (7)$$

где $(x)_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ x(x+1) \cdot \dots \cdot (x+n-1), & n \neq 0 \end{cases}$

– факториальное произведение; $\Gamma(x)$ – гамма-функция.

Численное моделирование с использованием алгоритма FFT

Для среды с малыми поперечными неоднородностями показателя преломления ($n(x, y) = n_0 + \delta n(x, y)$, $\delta n(x, y) = n_0$) справедлива аппроксимация [7]:

$$E(x, y, z) \approx \exp\left\{i \frac{z}{2} [\nabla_{\perp}^2 + k^2]^{1/2}\right\} \times$$

$$\times \exp\{iz\chi(x, y)\} \exp\left\{i \frac{z}{2} [\nabla_{\perp}^2 + k^2]^{1/2}\right\} \times, \quad (8)$$

$$\times E_0(x, y) + O(z^3),$$

где $\chi(x, y) = k \frac{\delta n(x, y)}{n_0}$.

Результатом операции

$$\exp\left\{i \frac{z}{2} [\nabla_{\perp}^2 + k^2]^{1/2}\right\} E_0(x, y)$$

является распределение комплексной амплитуды, формируемое при распространении волны в однородной среде с показателем преломления n_0 на расстоянии $z/2$ от начального распределения. Умножение распределения комплексной амплитуды на выражение $\exp\{iz\chi(x, y)\}$ эквивалентно действию тонкого оптического элемента на проходящую через него световую волну.

Многочисленное использование аппроксимации (8) с точностью до погрешности $O(z^3)$ эквивалентно моделированию распространения светового пучка через периодическую систему одинаковых тонких оптических элементов с функцией пропускания $\exp\{iz\chi(x, y)\}$ в однородной среде с показателем преломления n_0 . Первый элемент расположен на расстоянии $z/2$ от начала отсчета, два соседних элемента располагаются на расстоянии z друг от друга.

Для параболической среды (2) оптическими элементами являются тонкие собирающие линзы.

Аппроксимация (8) позволяет произвести численное моделирование распространения светового пучка в неоднородной среде на значительные расстояния. Для этого необходимо выбрать достаточно малый шаг δz по оптической оси, учитывая то, что погрешность на расстоянии z порядка $zO(\delta z^2)$. Использование алгоритма FFT позволяет получить наиболее высокую ско-

рость расчета, однако этот алгоритм вносит дополнительную погрешность из-за необходимости ограничения пространственной и спектральной областей [7-10].

Сравнение полученных результатов

Ниже приводятся сравнительные графики зависимости интенсивности вихревого пучка от радиуса на расстоянии $(1/4)z_T$.

Таблица 2. Распределения интенсивности разложения вихревого пучка для значений $\mu = 1,5$, $\sigma = (1/2)\sigma_0$ для конечного числа мод $n_{\max} = 50$.

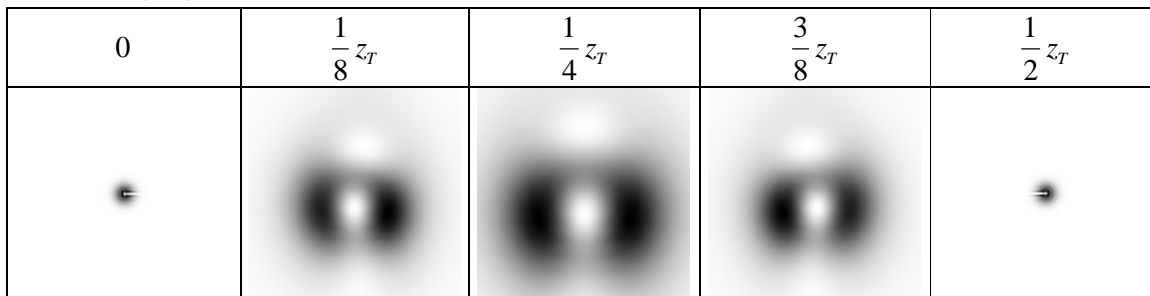


Таблица 3. Распределения интенсивности результатов численного моделирования распространения вихревого пучка для значений $\mu = 1$, $\sigma = (1/2)\sigma_0$.

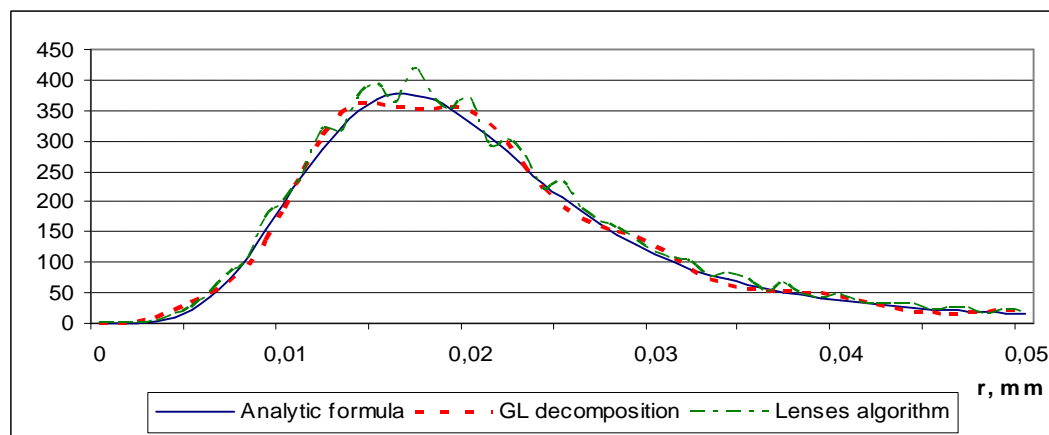
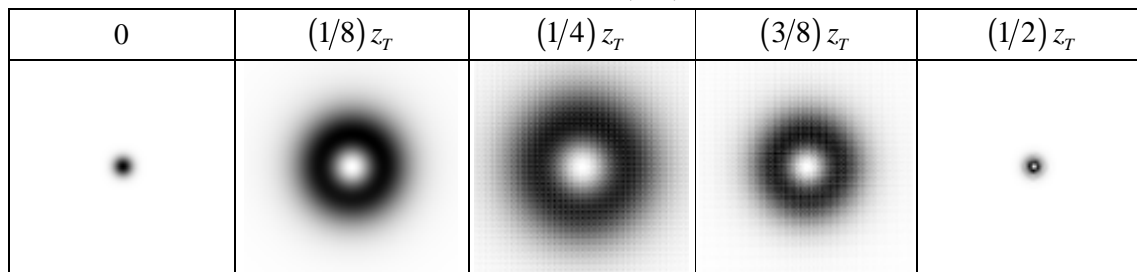


Рис. 1. Зависимость интенсивности от радиуса вихревого пучка для значений $\mu = 2$, $\sigma = \sigma_0$.

Заключение

В работе получено аналитическое выражение, описывающее зависимость ком-

плексной амплитуды вихревого пучка, распространяющегося в параболическом волокне от расстояния вдоль оптической оси в

приближении Френеля. Получено аналитическое разложение вихревого пучка в виде композиции мод Гаусса – Лагерра. Проведено численное моделирование распространения вихревого пучка в параболическом волокне с использованием метода тонких линз. Сравнение полученных аналитических и численных результатов показывает их справедливость с точностью до погрешностей численного моделирования.

This work was partially supported by the Russian-American program “Basic Research and Higher Education” (CRDF Project RUX0-014-SA-06) and by the Russian Foundation for Basic Research grants 07-07-97600 and 08-07-99007.

Библиографический список

1. M. S. Soskin and M. V. Vasnetsov, Progress in Optics. – 2001. – 42. – P.219.
2. Soifer V.A., Kotlyar V.V., Khonina S. N., Physics of Particles and Nuclei 35(6), 733 (2004)
3. Kotlyar V.V., et al, J. Opt. Soc. Am. A 22(5), 849 (2005)
4. **Стрилец, А.С.** Согласование и исследование методов, основанных на дифференциальном и интегральном операторах распространения лазерного излучения в среде с малыми неоднородностями [текст] / А.С. Стрилец, С.Н. Хонина, // Компьютерная оптика. – 2008. – Т.32, №1. – P.33-38.
5. **Снайдер, А.** Теория оптических волноводов [текст] / А. Снайдер, Д. Лав – М.: Радио и связь, 1987.
6. Методы компьютерной оптики [текст] / Под ред. В.А.Сойфера. – М.: Физматлит, 2003. – 688с.
7. **Feit, M.D.** Light Propagation in Graded-Index Optical Fibers [текст] / M.D. Feit, J.A. Fleck // Appl. Opt. – 1978. – Vol. 17 (24). – PP. 3990-3998.
8. **Okoshi, T.** The Beam Propagation Method [текст] / T. Okoshi, S. Kitazawa // Analysis methods for electromagnetic wave problems. Editor E. Yamashita, Artech House, 1990. Chapter 10.
9. **Huand, W.** The Finite-Difference Vector Beam Propagation Method: Analysis and Assesment [текст] / W. Huand [and other] // J. of Lightwave Technology. – 1992. – Vol. 10 (3).
10. **Lu, Y.Y.** Some Techniques for Computing Wave Propagation in Optical Waveguides [текст] / Y.Y. Lu // Communications in Computational Physics. – 2006. – Vol. 1. – P. 1056-1075.

Сведения об авторе

Стрилец Алексей Сергеевич, студент, Самарский государственный аэрокосмический университет им. С.П. Королева email: axsc@inbox.ru. Область научных интересов - моделирование распространения лазерных полей в оптических волноводах, программирование.