

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ИСКАЖЕНИЙ НА СВОЙСТВА МОДОВЫХ ЛАЗЕРНЫХ ПОЛЕЙ

© 2008 А.О. Шевин¹, С.Н. Хонина²

¹Самарский государственный аэрокосмический университет

²Институт систем обработки изображений РАН

Рассматриваются самовоспроизводящиеся модовые пучки Гаусса–Эрмита, Гаусса–Лагерра и Бесселя и их возможность восстановления после прохождения препятствия (непрозрачного и препятствия из материала с показателем преломления $n = 1,5$), которым может служить захваченная этими пучками микрочастица. Проводится сравнительный анализ свойств восстановления мод Гаусса–Эрмита, Гаусса–Лагерра и Бесселя и их суперпозиций.

Модовые пучки Гаусса–Эрмита, Гаусса–Лагерра, Бесселя, оптическое манипулирование, искажение препятствием, самовоспроизведение, восстановление

Введение

Манипулирование микрообъектами с помощью лазерных пучков – весьма бурно развивающееся в последнее время направление. Впервые возможность использования лазерного излучения для манипулирования микрочастицами была продемонстрирована в 1970 г. При этом использовался гауссовый пучок (фундаментальная мода лазерного излучения). С тех пор идея бесконтактного управления процессами микро- и наномасштаба была успешно использована в различных областях: для торможения, отклонения, охлаждения и локализации атомов, для захвата и разделения различных типов бактерий, клеток, вирусов, для изоляции генов в хромосомах, спайки клеток удалением общей стенки при помощи «оптического скальпеля», в нанотехнологиях и управлении элементами микромеханики.

Расширение области применения лазерных «ловушек» потребовало их усложнения с целью получения новых дополнительных возможностей. Такие возможности можно получить, например, при использовании гауссовых мод и мод Бесселя. Благодаря замечательным свойствам этих пучков можно производить с микрообъектами различные действия, такие, как: управлять движением потока частиц, вращать их, захватывать в пространственные «ловушки», расположенные в определённом порядке [1]. В качестве объектов манипуляции могут быть использованы самые различные частицы – отдельные атомы, молекулы, бактерии и вирусы, мелкодисперсные взвеси и аэрозоли.

Такие свойства бесселевых пучков, как инвариантность при распространении в свободном пространстве и отсутствие расходимости на интервале устойчивости, а также способность восстановления после внесения в пучок объекта-препятствия [2, 3], делают их удобными при необходимости одновременного манипулирования набором расположенных вдоль оптической оси микрочастиц [4, 5]. Однако ввиду бесконечной эффективной ширины бесселевого пучка его невозможно воспроизвести точно. В результате ограниченности размера и энергии, пройдя некоторое расстояние, сформированный пучок теряет свои замечательные свойства и «разваливается», переставая сохранять первоначальную конфигурацию. Кроме того, при изображении линзовыми оптическими системами, что часто необходимо при микроманипулировании, бесселев пучок приобретает расходимость [6].

Модовые пучки Гаусса–Эрмита и Гаусса–Лагерра не искажаются при прохождении через линзовые оптические системы и сохраняют свою конфигурацию (с точностью до масштаба) на неограниченном расстоянии (как отдельные моды, так и их специальные суперпозиции). Кроме того, они имеют конечный эффективный радиус, а значит могут быть весьма точно воспроизведены оптическими системами. Таким образом, исследования возможности их восстановления после прохождения препятствий представляют определённый интерес.

1. Теоретические основы

1.1. Моды Гаусса-Эрмита

Функции Гаусса-Эрмита (ГЭ) являются модами среды с параболически изменяющимся показателем преломления.

Моды Гаусса-Эрмита [7]

$$\Psi_{nm}(x, y) = \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{\sigma_0^2}\right] H_n\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sigma_0}\right) H_m\left(\frac{\sqrt{2}y}{\sigma_0}\right), \quad (1)$$

где σ – гауссовый параметр, $H_n(x)$ – полином Эрмита n -го порядка, являются частными решениями параксиального волнового уравнения.

В свободном пространстве функции ГЭ сохраняют свою структуру с точностью до масштаба и распространяются по следующему закону [7]:

$$\Psi_{nm}(x, y, z) = \frac{\sigma_0}{\sigma(z)} \exp[i(n+m+1)\eta(z)] \times \exp\left[\frac{-i\pi(x^2 + y^2)}{\lambda R(z)}\right] \times \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{\sigma^2(z)}\right] H_n\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sigma(z)}\right) H_m\left(\frac{\sqrt{2}y}{\sigma(z)}\right), \quad (2)$$

где

$$\eta(z) = \arctg(z/z_0), \quad R(z) = z(1 + z_0^2/z^2),$$

$$\sigma(z) = \sigma_0 \sqrt{1 + z^2/z_0^2}, \quad z_0 = \pi\sigma_0^2/\lambda,$$

z_0 – расстояние Релея, σ_0 – эффективная ширина модовой функции в плоскости перетяжки, λ – длина волны лазерного излучения.

Далее в работе для исследования распространения лазерных пучков ГЭ в свободном пространстве будут использоваться аналитические выражения (1) и (2).

1.2. Моды Гаусса-Лагерра

Функции Гаусса-Лагерра (ГЛ) являются модами среды с параболически изменяющимся показателем преломления и имеют вид

$$\Psi_{nm}(r, \varphi) = \left(\frac{r\sqrt{2}}{\sigma_0}\right)^m \exp\left(-\frac{r^2}{\sigma_0^2}\right) \times L_n^{|m|}\left(\frac{2r^2}{\sigma_0^2}\right) \exp(im\varphi), \quad (3)$$

где $L_n^{|m|}(x)$ – обобщённый многочлен Лагерра [8].

В свободном пространстве функции ГЛ сохраняют свою структуру с точностью до масштаба и распространяются по следующему закону [7]:

$$\Psi_{nm}(r, \varphi, z) = \frac{\sigma_0}{\sigma(z)} \left(\frac{\rho\sqrt{2}}{\sigma(z)}\right)^m L_n^{|m|}\left(\frac{2\rho^2}{\sigma^2(z)}\right) \times \exp\left[\frac{-\rho^2}{\sigma^2(z)} + \frac{ik\rho^2}{2R(z)} + im\theta - i(2n+m+1)\arctg\left(\frac{z}{z_0}\right)\right], \quad (4)$$

где

$$\beta_{nm}(z) = (2n + |m| + 1) \cdot \arctg(z/z_0),$$

$$z_0 = \pi\sigma_0^2/\lambda, \quad \sigma^2(z) = \sigma_0^2(1 + z^2/z_0^2),$$

$$R(z) = z(1 + z_0^2/z^2),$$

z_0 – расстояние Релея, σ_0 – эффективная ширина модовой функции в плоскости перетяжки (т.е. $\sigma_0 = \sigma(z)|_{z=z_0}$), λ – длина волны лазерного излучения.

Индекс n является радиальным и определяет количество колец в структуре моды, индекс m – азимутальный и соответствует номеру угловой гармоники (порядку винтовой фазы).

1.3. Моды Бесселя

Рассмотрим распространение Бесселевого пучка:

$$\Psi_n(r, \varphi) = J_n(\alpha r) \exp(in\varphi), \quad (5)$$

где $J_n(x)$ – функция Бесселя первого рода n -го порядка [8].

Моды Бесселя

$$\Psi(x, y, z) = i^n \sqrt{2\pi \sin \theta_0} J_n(k \sin \theta_0 r) \times \exp[i(n\varphi + kz \cos \theta_0)] \quad (6)$$

являются решением уравнения Гельмгольца и обладают бесконечной энергией (как и плоская волна). Выражение (6) (θ_0 – минимальный угол отклонения конических волн) описывает скалярный непараксиальный Бесселев пучок, который не претерпевает дифракции при распространении вдоль оси z и сохраняет свой диаметр.

Условие стабильности пучка при распространении записывается в следующем виде:

$$\alpha = \text{const}, \forall n. \quad (7)$$

На практике моды Бесселя формируются с помощью оптических элементов, имеющих конечный диаметр, и сохраняют модовый характер на конечном расстоянии, которое пропорционально радиусу элемента и обратно пропорционально масштабному коэффициенту функции Бесселя $\alpha = k \sin \theta_0$:

$$z_{\text{max}} = \frac{R}{\tan \theta_0} = R \left(\frac{k^2}{\alpha^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (8)$$

В оптических схемах для манипуляции микрочастицами с помощью Бесселевых пучков сферическая линза фокусирует световую энергию в фокальной плоскости путём отображения бесселевого пучка, созданного аксиконом или голограммой. Известно [9], что после отображения бесселевого пучка сферической линзой бесселевый пучок теряет свойство сохранения своего диаметра и начинает расходиться:

$$\Psi(\rho, z) = \frac{a}{z} J_0 \left(\frac{k \sin \theta_0 a \rho}{z} \right) \times \exp \left[i \frac{k \rho^2}{2z} \left(1 + \frac{a}{z} \right) \right], \quad (9)$$

где $\rho^2 = u^2 + v^2$, a – расстояние до сферической линзы.

Выражение (10) соответствует параксиальному бесселеву пучку, созданному с помощью узкой круглой диафрагмы радиуса α в непрозрачном экране:

$$\Psi_n(r, \varphi, z) = (-i)^{n+1} \frac{\alpha}{z} \exp \left[i \frac{k}{2z} (r^2 + \alpha^2) \right] \times J_n \left(\frac{k \alpha r}{z} \right) \exp(in \varphi), \quad (10)$$

который, в отличие от непараксиального бесселева пучка (6), претерпевает дифракционные изменения (расхождение) при распространении вдоль оси z .

Как было сказано выше, на практике идеальный бесселев пучок не может быть получен ввиду конечности апертуры любой

реальной оптической системы и конечной энергии любого реального источника излучения. Это ограничивает расстояние «устойчивости» модового поведения пучка, которое описывается формулой (5). Тем не менее, бесселевы пучки активно используются для манипулирования микрообъектами, т.к. обладают свойством быстро восстанавливаться после искажения некоторым препятствием.

Многомодовый пучок, распространяющийся в свободном пространстве, имеет следующий вид:

$$U(x, y, z) = \sum_{n,m=0}^N C_{nm} \Psi_{nm}(x, y, z), \quad (11)$$

где $\Psi_{nm}(x, y, z)$ – например, функции вида (2), (4) или (10), C_{nm} – комплексные коэффициенты.

Распространение скалярного светового поля в свободном пространстве с распределением амплитуды $f(x, y)$ на плоскости $z = 0$ и $F(x, y, z)$ на плоскости z также можно описать с помощью преобразования Френеля:

$$F(u, v, z) = -\frac{ik}{2\pi z} \exp(ikz) \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp \left[\frac{ik}{2z} ((x-u)^2 + (y-v)^2) \right] dx dy. \quad (12)$$

Далее в работе для численного исследования распространения лазерных пучков в свободном пространстве используется выражение (12). Этот способ позволяет рассчитать распространение любого поля, в том числе искаженного.

2. Численное моделирование

При расчётах принимались следующие значения параметров:

- 1) $\sigma_0 = 0,55$ мм – эффективный радиус пучка для гауссовых мод, аргумент функции Бесселя $\alpha = 6$;
- 2) $\lambda = 630 \cdot 10^{-6}$ мм – длина волны;
- 3) размер входной апертуры для гауссовых мод 4×4 мм, для мод Бесселя 6×6 мм;
- 4) $n_0 = 1,5$ – показатель преломления материала препятствия.

Для численного вычисления интеграла Френеля (12) использовался метод трапеций

[10-12]. Отсчеты входного поля для мод ГЭ, ГЛ и Бесселя вычислялись по формулам (1), (3) и (5) соответственно. Распространение суперпозиции модовых пучков исследовалось с помощью выражения (11).

В данной работе исследуется восстановление структуры мод и некоторых суперпозиций после искажения непрозрачным препятствием и после искажения препятствием из материала с показателем преломления $n = 1,5$. Для этого в преобразование Френеля подставлялось искаженное входное поле и вычислялось распределение светового поля на различных расстояниях z . Степень восстановления поля оценивалась по следующей формуле:

$$\delta(z) = \frac{\sqrt{\sum_n \left[|F_1(u_n, v_n, z)|^2 - |F_2(u_n, v_n, z)|^2 \right]^2}}{\sum_n |F_1(u_n, v_n, z)|^4}, \quad (13)$$

где $F_1(u, v, z)$ – распределение исходного неискаженного светового поля на расстоянии z , а $F_2(u, v, z)$ – распределение искаженного светового поля, полученное с использованием преобразования Френеля.

2.1. Результаты численного моделирования распространения модовых пучков, искаженных после прохождения непрозрачного препятствия

Представим далее результаты моделирования распространения мод, искаженных после прохождения непрозрачного препятствия, которым может являться захваченная полем частица, и проследим тенденцию их восстановления. Частица представляет собой шарик радиусом $r_0 = 0,16 \text{ мм}$.

2.1.1. Мода Гаусса-Эрмита

Результаты моделирования распространения моды ГЭ $\Psi_{1,1}$ приведены на рис. 1 и 2: значения относительной погрешности и распределения идеальной и искаженной препятствием моды. Относительная погрешность в плоскости препятствия (при $z=0$) составляет 22,7%.

Из рис. 2 видно, что мода ГЭ $\Psi_{1,1}$ достаточно быстро восстанавливает свою первоначальную структуру, так при $z = 1000 \text{ мм}$ еще заметно нарушение симметрии в интенсивности пучка и достаточно сильное искажение фазы, а при $z = 4000 \text{ мм}$ и выше структура моды восстанавливается.

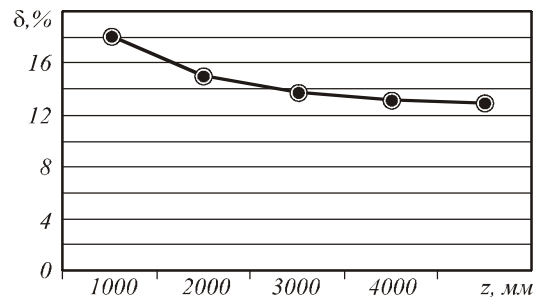


Рис. 1. Зависимость $\sigma(z)$ для искаженной моды ГЭ $\Psi_{1,1}$

2.1.2. Мода Гаусса-Лагерра

Моды ГЛ также имеют свойство восстанавливаться после прохождения препятствия, а наблюдаемая динамика восстановления (рис. 3) такая же, как и у мод ГЭ. Значения погрешности того же порядка представлены на рис. 4. Относительная погрешность в плоскости препятствия составляет 21,9%. К особенностям следует отнести то, что в распределении интенсивности сначала восстанавливается центральное кольцо, а затем - периферийные.

2.1.3. Мода Бесселя

Относительная погрешность (рис. 5) достаточно быстро уменьшается с увеличением расстояния z по сравнению со всеми рассмотренными гауссовыми модами. При этом относительная погрешность в плоскости препятствия составляла несколько большее значение, чем в предыдущих случаях – 24,1%.

Из рис. 6 видно, что искажение практически не влияет на фазу, а восстановление интенсивности происходит как у мод Гаусса-Лагерра: сначала восстанавливаются центральные кольца, а затем - периферийные.

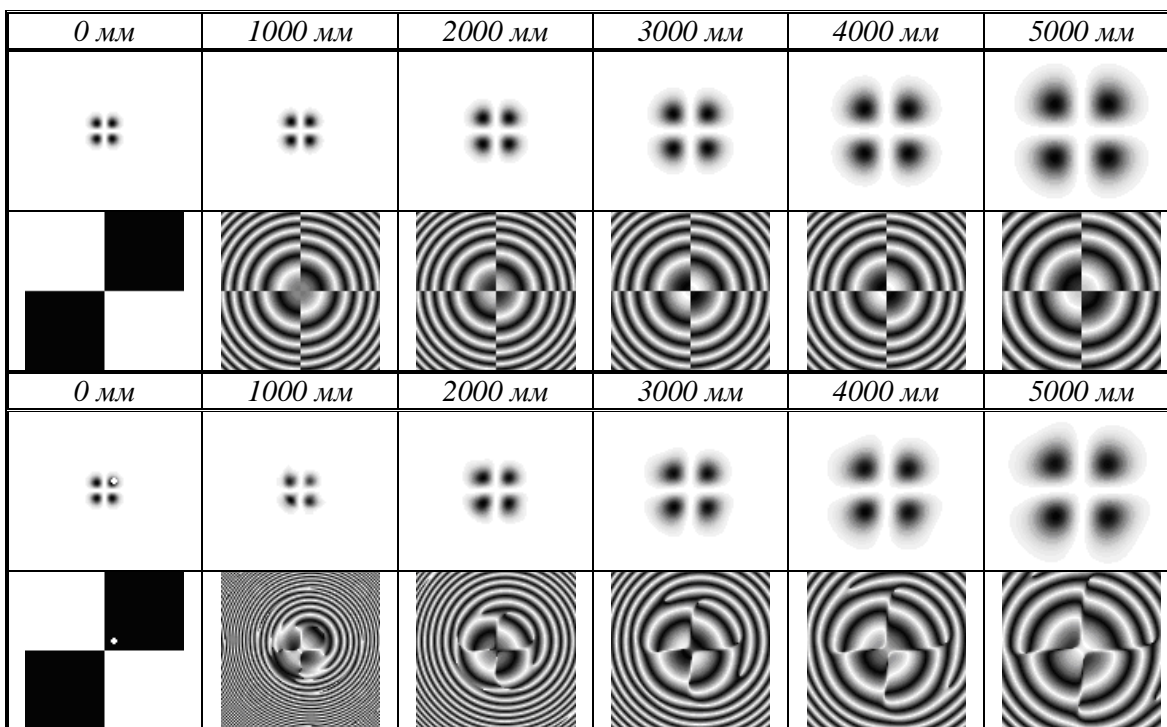


Рис. 2. Интенсивность и фаза моды ГЭ $\Psi_{1,1}$ на различных расстояниях, неискаженной (верхняя строка) и искаженной непрозрачным препятствием (нижняя строка)

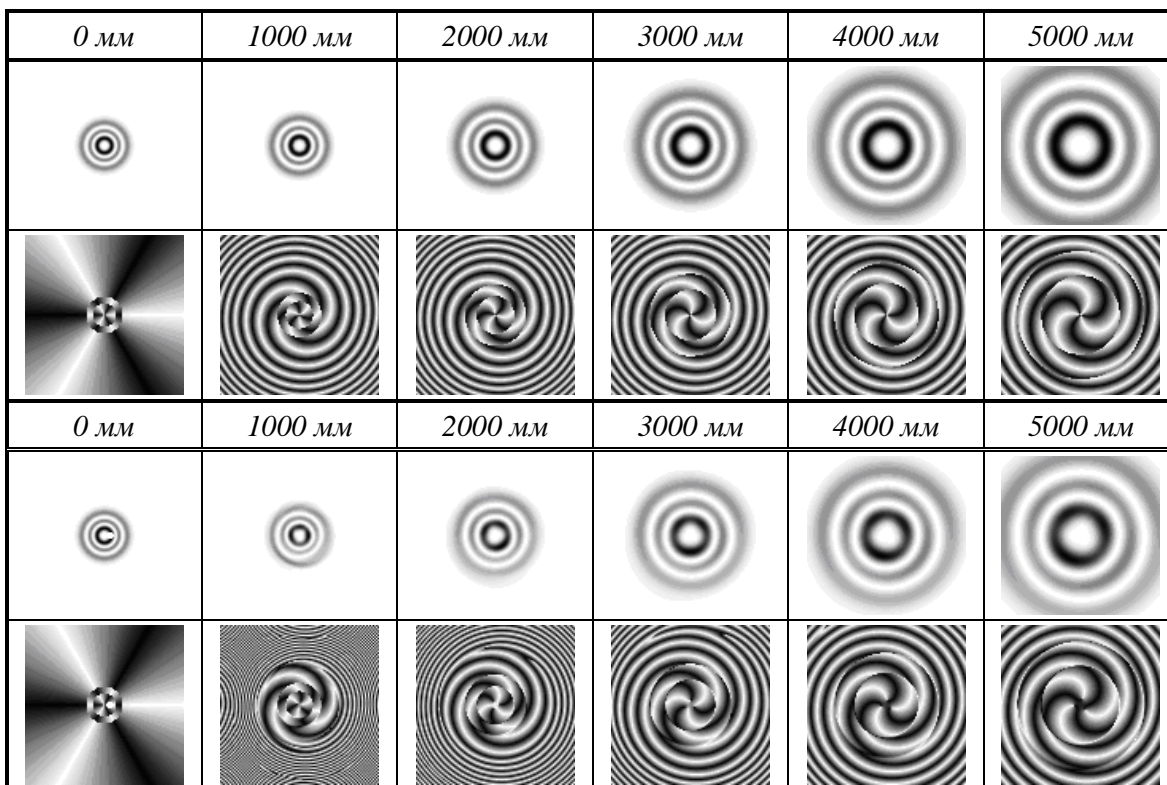


Рис. 3. Интенсивность и фаза моды ГЛ $\Psi_{2,3}$ на различных расстояниях, неискаженной (верхняя строка) и искаженной непрозрачным препятствием (нижняя строка)

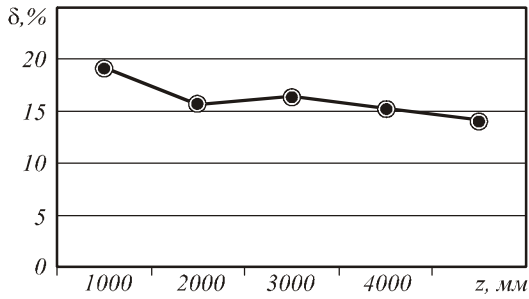


Рис. 4. Зависимость $\sigma(z)$ для искаженной моды ГЛ $\Psi_{2,3}$

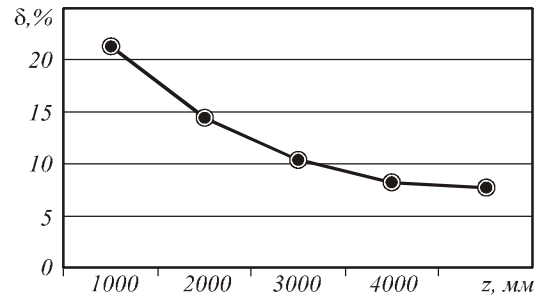


Рис. 5. Зависимость $\sigma(z)$ для искаженной суперпозиции мод Бесселя (2)+(-1)

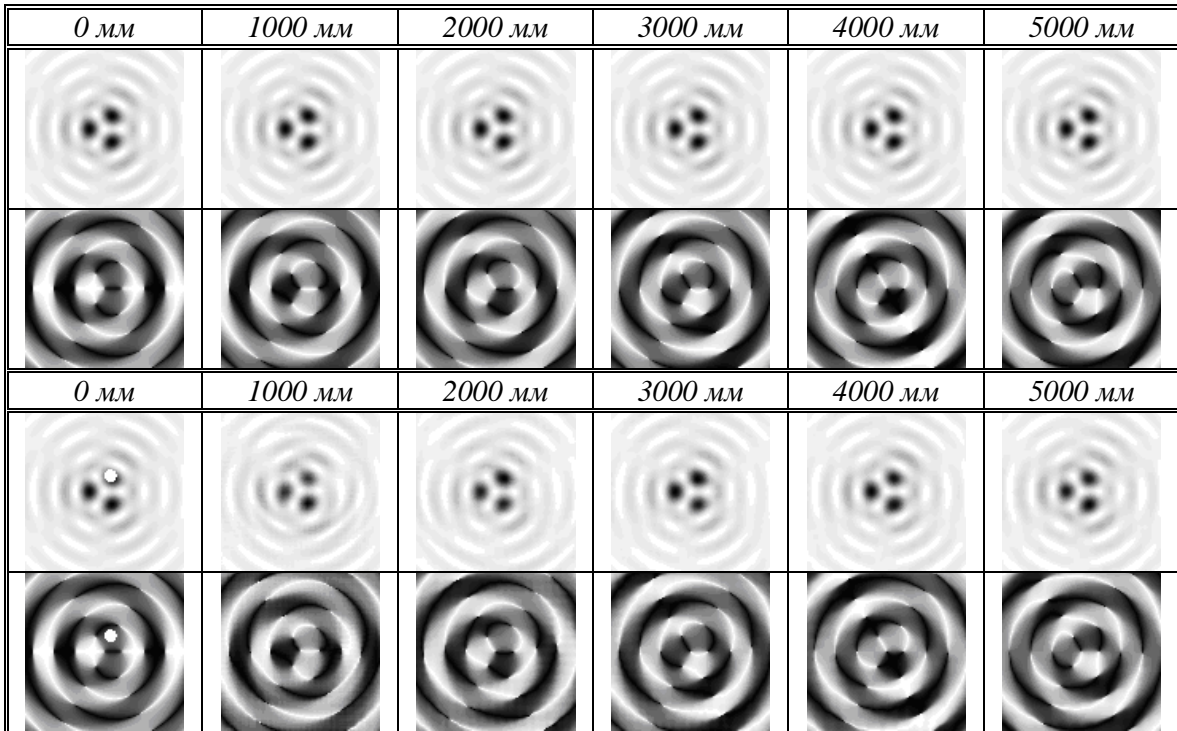


Рис. 6. Интенсивность и фаза суперпозиции мод Бесселя (2)+(-1) на различных расстояниях, неискаженной (верхняя строка) и искаженной непрозрачным препятствием (нижняя строка)

2.2. Результаты численного моделирования распространения модовых пучков, искаженных после прохождения прозрачного препятствия

Далее рассмотрим искажение модовых пучков при захвате частицы, состоящей из материала с показателем преломления $n = 1,5$. Частица представляет собой шарик радиусом $r_0 = 0,16 \text{ мм}$. Рассеяния энергии в этом случае не происходит. Моделирование такого препятствия осуществляется путём домножения комплексной амплитуды светового поля на фазовую функцию $\Phi(r, n)$,

соответствующую частице с заданными показателем преломления n и радиусом r_0 :

$$\Phi(r, n) = \begin{cases} \exp(in\sqrt{r_0^2 - r^2}), & r \leq r_0, \\ 1, & r > r_0. \end{cases}$$

2.2.1. Мода Гаусса-Эрмита

Картина искажений в случае прозрачного препятствия несколько отличается от рассмотренного ранее искажения непрозрачным препятствием.

Искажение не так заметно затрагивает распределение интенсивности, но сильно влияет на фазовый портрет, что видно на

примере моды ГЭ $\Psi_{3,3}$ (рис. 7). Заметен всплеск фазы в месте, где находилась захваченная частица.

Значения абсолютной погрешности ниже (рис. 8), чем в случае непрозрачного препятствия (значения уменьшаются от 8,5% до 7,6% против 21,5% и 18%), вслед-

ствие малого влияния рассматриваемого искажения на распределение интенсивности.

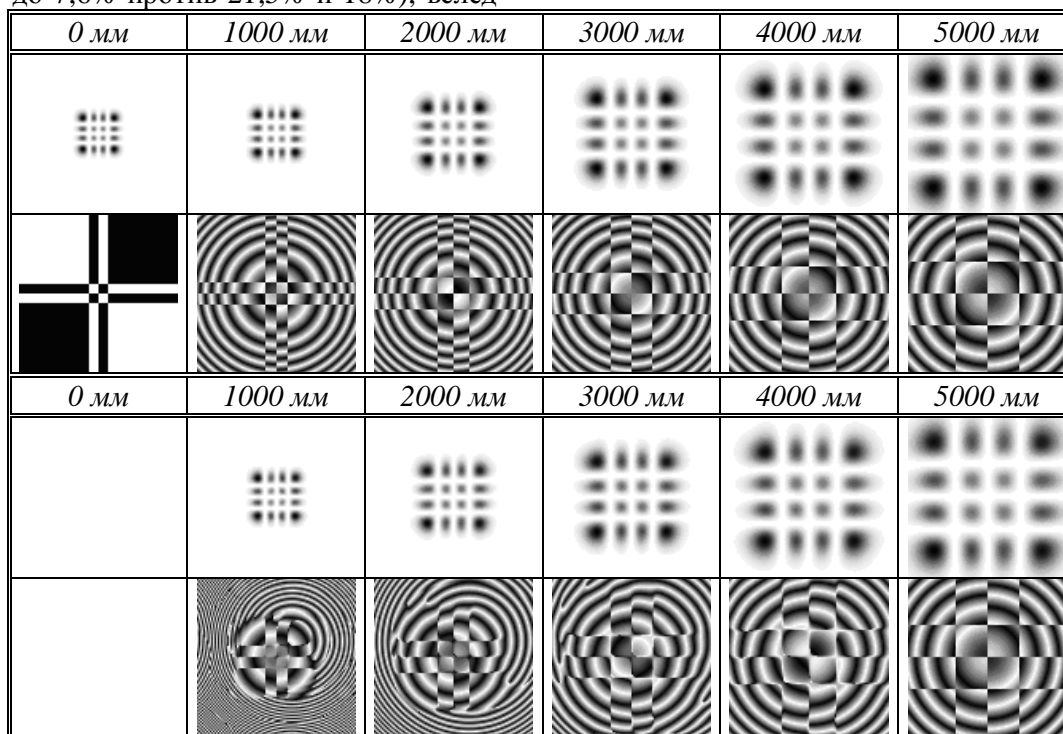


Рис. 7. Интенсивность и фаза моды ГЭ $\Psi_{3,3}$ на различных расстояниях, неискаженной (верхняя строка) и искаженной прозрачным препятствием (нижняя строка)

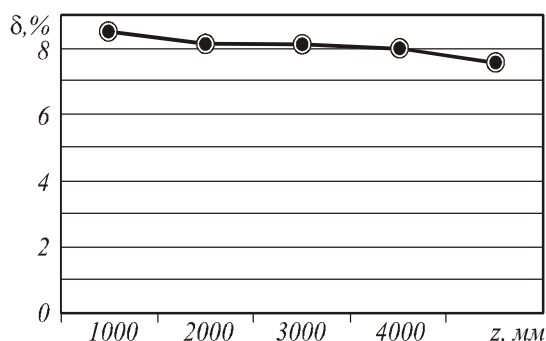


Рис. 8. Зависимость $\delta(z)$ для искаженной моды ГЭ $\Psi_{3,3}$

2.2.2. Мода Гаусса-Лагерра

Суперпозиция $\Psi_{0,1} + \Psi_{1,2}$ демонстрирует такую же динамику восстановления, как и мода ГЛ в случае непрозрачного препятствия, только с меньшими значениями относительной погрешности (рис. 9). Распре-

деление для искаженного и обычного пучка приведено на рис. 11.

2.2.3. Мода Бесселя

Мода Бесселя 3-го порядка так же, как в случае искажения непрозрачным препятствием, демонстрирует лучшую тенденцию по восстановлению своей структуры (рис. 12) в сравнении с гауссовыми модами.

Характер искажения подобен для непрозрачного препятствия. За исключением того, что здесь искажение затрагивает только то кольцо интенсивности, которым захватывалась частица, и его структура восстанавливается, не затрагивая соседние кольца.

Значение относительной погрешности (рис. 10) изменяется от 9% до 3,5%, то есть наблюдается ее более резкий спад при за-

данных расстояниях в сравнении с гауссовыми пучками.

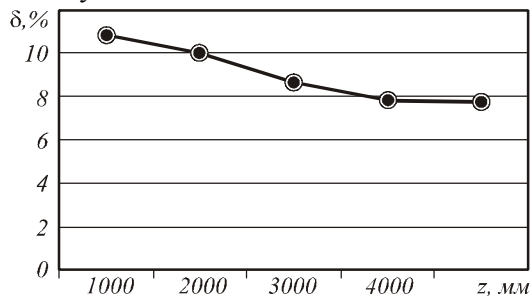


Рис. 9. Зависимость $\sigma(z)$ для искаженной суперпозиции мод ГЛ $\Psi_{0,1} + \Psi_{1,2}$

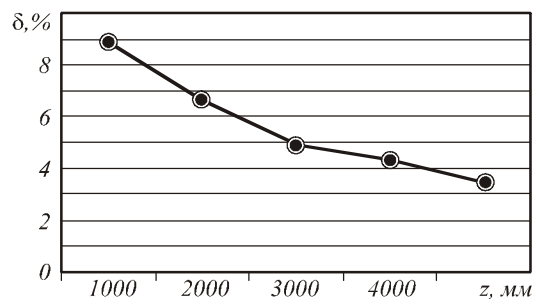


Рис. 10. Зависимость $\sigma(z)$ для искаженной моды Бесселя 3-го порядка

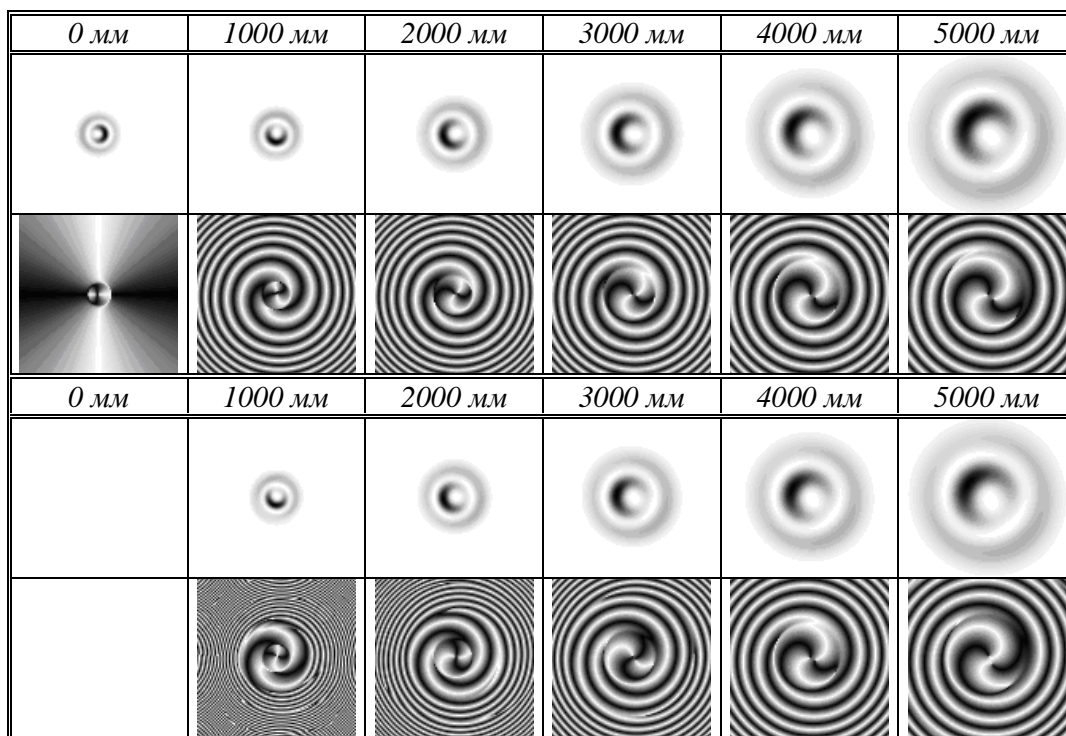


Рис. 11. Интенсивность и фаза суперпозиции мод ГЛ $\Psi_{0,1} + \Psi_{1,2}$ на различных расстояниях, неискаженной (верхняя строка) и искаженной прозрачным препятствием (нижняя строка)

3. Заключение

Все рассмотренные моды и суперпозиции мод, искаженные препятствием, восстанавливают свою первоначальную структуру с увеличением расстояния z . Замечено, что у мод ГЛ искажение влияет на все кольца интенсивности, а не только на то, которое взаимодействовало с частицей, причем сначала восстанавливается центральное кольцо, а затем периферийные. Восстановление фазы начинается с центральной области.

Для мод Бесселя искажение почти не влияет на фазу, а восстановление интенсивности происходит как у мод ГЛ: сначала восстанавливаются центральные кольца интенсивности, а затем периферийные (действие «тени» от препятствия). Моды различных порядков и суперпозиции восстанавливаются примерно одинаково. Значение относительной погрешности достаточно быстро уменьшается с увеличением расстояния z по сравнению со всеми рассмотренными гауссовыми модами. На основании этого

можно говорить о том, что моды Бесселя восстанавливаются значительно быстрее, чем гауссовы моды.

Картина искажений в случае прозрачного препятствия несколько отличается. Искажение почти не затрагивает распределения интенсивности, но сильно влияет на фазовый портрет (для рассмотренных гауссовых мод). В некоторых случаях заметен всплеск фазы в месте, где находилась захваченная частица. Для мод Бесселя характер искажения подобен случаю с непрозрачным препятствием. За исключением того, что искажение затрагивает только

кольцо интенсивности, которым захватывалась частица, и его структура восстанавливается, не затрагивая соседние кольца.

Замечено, что значения относительной погрешности на расстоянии порядка двухсот входных апертур (5000 мм) для всех рассмотренных пучков Бесселя независимо от типа искажения находятся в пределах от 3% до 7%, в то время как у гауссовых мод они могут принимать совершенно разные значения и могут достигать более 20%.

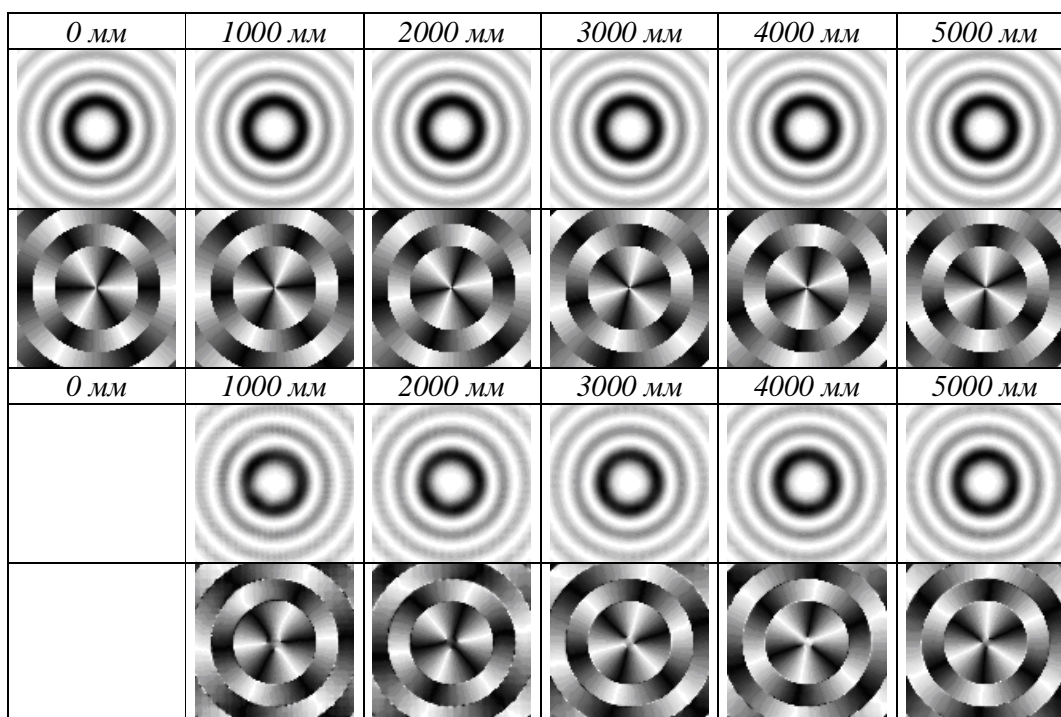


Рис. 12. Интенсивность и фаза моды Бесселя 3-го порядка на различных расстояниях, неискаженной (верхняя строка) и искаженной прозрачным препятствием (нижняя строка)

Библиографический список

1. **Сойфер, В.А.** Оптическое манипулирование микрообъектами: достижения и новые возможности, порожденные дифракционной оптикой [текст] / В.А. Сойфер, В.В. Котляр, С.Н. Хонина // Физика элементарных частиц и атомного ядра. 2004. – 35(6). – С. 1368-1432.
2. **MacDonald, R.P.** Interboard optical data distribution by Bessel beam shadowing [текст] / R.P. MacDonald [and other] // Optics Communication. – 1996. – V.122. – P. 169-177.

3. **Soroko, L.M.** What does the term “light beam” mean? [текст] / L.M. Soroko // Preprint of JINR, E13-99-226, Dubna, 1999.

4. **Arlt, J.** Optical micromanipulation using Bessel light beams [текст] / J. Arlt [and other] // Opt. Comm. – 2001. – V. 197. – P. 239-245.

5. **Garces-Chavez, V.** Simultaneous micromanipulation in multiple planes using a self-reconstructing light beam [текст] / V. Garces-Chavez [and other] // Nature. – 2002. – V. 419. – P. 145-147.

6. **Khonina, S.N.** Rotation of microparticles with Bessel beams generated by diffractive elements [текст] / S.N. Khonina [and other] // J. Mod. Opt. – 2004. – V. 51(14). – P. 2167–2184.
7. Методы компьютерной оптики [текст] / под ред. В.А.Сойфера. – М.: Физматлит, 2003. – 688 с.
8. **Янке, Е.** Специальные функции [текст] / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш – М.: Наука, 1968. – 344с.
9. **Котляр, В.В.** Операторное описание параксиальных световых полей [текст] / В.В. Котляр, С.Н. Хонина, Я. Ванг // Компьютерная оптика. – 2001. – №21. – С. 45-52.
10. **Бахвалов, Н. С.** Численные методы: учеб. Пособие [текст] / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков – М.: Наука, 1987. – 600 с.
11. **Федорюк, М.В.** Асимптотика: Интегралы и ряды [текст] / М.В. Федорюк – М.: Наука. – 1987. – 544 с.
12. The computer in optical research. Methods and applications [текст] / Ed. by B.R. Frieden – Springer-Verlag, Berlin, 1980.

Сведения об авторах

Хонина Светлана Николаевна, Самарский государственный аэрокосмический университет имени С.П. Королева, профессор кафедры «Техническая кибернетика»; Институт систем обработки изображений РАН, Самара, ведущий научный сотрудник, e-mail: khonina@smr.ru. Область научных интересов: дифракционная оптика, волоконная оптика, оптическая обработка сигналов и изображений.

Шевин Андрей Олегович, Самарский государственный аэрокосмический университет имени С.П. Королева, аспирант. Область научных интересов: моделирование работы дифракционных элементов, программирование.