УДК 519.254

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ МНОГОМЕРНОЙ ПО ВХОДУ И ВЫХОДУ ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПРИ НАЛИЧИИ АВТОКОРРЕЛИРОВАННЫХ ПОМЕХ В СИГНАЛАХ

 А. А. Карпов, О. А. Кацюба

Самарский государственный университет путей сообщения

Рассматривается теория и методика решения задачи состоятельного оценивания параметров многомерных линейных разностных уравнений с автокоррелированными помехами во входных и выходных сигналах на основе обобщения метода наименьших квадратов (как наиболее распространенного в условиях априорной неопределённости). Доказывается состоятельность получаемых оценок неизвестных истинных значений параметров.

Линейные разностные уравнения, параметрическая идентификация, многомерный вход и выход, автокоррелированные помехи в сигналах.

Рассмотрим многомерную стационарную устойчивую линейную динамическую систему с дискретным временем (i = ..., -1, 0, 1, ...), описываемую следующим уравнением:

$$Z_i = G_1^{(1)} Z_{i-1} + G_1^{(2)} Z_{i-2} + \dots G_1^{(r)} Z_{i-r} + \\ + G_2^{(0)} X_i + G_2^{(1)} X_{i-1} + \dots G_2^{(r_1)} X_{i-r_1}, \qquad (1)$$

$$Y_i = Z_i + \Xi_1(i), \quad W_i = X_i + \Xi_2(i),$$

где Z_i, Y_i – ненаблюдаемый и наблюдаемый векторы состояний системы соответственно ($Z_i, Y_i \in R_{p_2}$), а X_i, W_i – соответственно ненаблюдаемый и наблюдаемый векторные входные сигналы ($X_i, W_i \in R_{p1}$). Идентификация объекта сводится к процедуре определения матриц неизвестных параметров $\hat{G}_1^{(r)}$, $\hat{G}_2^{(r_1)}$ по $\{Y_i\}$, $\{W_i\}$ при известных порядках r и r_1 и является задачей параметрического оценивания. В [1] рассмотрена задача идентификации параметров одномерной по входу и выходу линейной динамической системы.

В общем случае последовательности $\{\Xi_1(i)\}$ и $\{\Xi_2(i)\}$ не являются последовательностями независимых случайных векторов, поэтому представляет интерес случай аддитивных локальных автокоррелированных шумов в канале наблюдений.

Пусть выполняются следующие условия:

1[0]. Множество, которому априорно принадлежат истинные значения матриц параметров устойчивой линейной многомерной системы, является компактным.

2[0]. X_i не зависит в совокупности от Ξ_k, где к = 1, 2.

3[0]. Вектор входных сигналов X_i и истинные параметры удовлетворяют условию

$$N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \begin{vmatrix} Z_{i-1} \\ \vdots \\ Z_{i-r} \\ X_i \\ \vdots \\ X_{i-r_1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Z_{i-1}^T & \cdots & Z_{i-r}^T & X_i^T & \cdots & X_{i-r_1}^T \end{vmatrix} \xrightarrow[N\to\infty]{П.Н.}$$

$$\xrightarrow[N\to\infty]{П.Н.} H = \begin{vmatrix} H_{zz} & H_{zx} \\ H_{zx}^T & H_{xx} \end{vmatrix},$$

где H положительно определена.

4[0]. Случайные последовательности $\{\Xi_1(i)\}$ и $\{\Xi_2(i)\}$ независимы в совокупности и удовлетворяют условиям:

$E(\Xi_1(i)/F_{i-1}) = 0$ п.н., $E(\Xi_2(i)/F'_{i-1}) = 0$ п.н.,

$E[\Xi_k(0)\Xi_k^T(0)] = D_k > 0$, $k = 1,2$,

$$N^{-1}\sum_{i=i_0}^{N}\Xi_k(i)\Xi_k^T(i+m)\xrightarrow[N\to\infty]{П.Н.}h^*_{\Xi_k}(m) < \infty,$$

$m = 0,\dots,r$ при $k = 1$;

$m = 0,\dots,r_1$ при $k = 2$,

$E[\Xi_1(i)\Xi_1^T(i)/F_{i-1}] \le W_1$,

$E[\Xi_2(i)\Xi_2^T(i)/F'_{i-1}] \le W_2$,

W_1, W_2 – случайные матрицы, E – оператор математического ожидания, $h^*_{\Xi_k}$ – матрица локальных автокорреляционных функций.

$\{F_i\}$ и $\{F'_i\}$ – неубывающие последовательности σ-алгебры:

$F_i = \sigma\{\Xi_1(0),\dots,\Xi_1(i)\}$,

$F'_i = \sigma\{\Xi_2(0),\dots,\Xi_2(i)\}$,

$E[W_1] \le \Pi_1$, $E[W_2] \le \Pi_2$.

5^0. Пусть

$$\Xi_{r,r_1} = (\Xi_1^T(i),\dots\Xi_1^T(i-r),\Xi_2^T(i),\dots\Xi_2^T(i-r_1))^T \in R_{p_2(r+1)\times p_1(r_1+1)}$$

$$N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\Xi_{r,r_1}\Xi_{r,r_1}^T\xrightarrow[N\to\infty]{П.Н.}\left(\begin{array}{c|c} D_1 & h^*_{\Xi_{1,2}} \\ \hline (h^*_{\Xi_{1,2}})^T & H^*_{\Xi_{1,2}}\end{array}\right),$$

где

$h^*_{\Xi_{1,2}} = \left|h^*_{\Xi_1} \;\vdots\; 0\right|$, размерности $h^*_{\Xi_1}$: $p_2 \times p_2 r$;

0: $p_2 \times p_1(r_1+1)$,

$$H^*_{\Xi_{1,2}} = \left(\begin{array}{c|c} H^*_{\Xi_1} & 0 \\ \hline 0^T & H^*_{\Xi_2}\end{array}\right),$$ размерности

$H^*_{\Xi_1}$: $p_2 r \times p_2 r$; $H^*_{\Xi_2}$: $p_1(r_1+1)\times p_1(r_1+1)$;

0: $p_2 r \times p_1(r_1+1)$,

$H^*_{\Xi_{1,2}}$ - положительно определённая матрица, элементами которой являются значения локальных автокорреляционных и взаимокорреляционных функций в различные моменты времени.

Уравнение (1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} Y_i - \Xi_1(i) &= G_1^{(1)}(Y_{i-1} - \Xi_1(i-1)) + G_1^{(2)}(Y_{i-2} - \Xi_1(i-2)) + \\ &+ \dots G_1^{(r)}(Y_{i-r} - \Xi_1(i-r)) + G_2^{(0)}(W_i - \Xi_2(i)) + \\ &+ G_2^{(1)}(W_{i-1} - \Xi_2(i-1)) + \dots G_2^{(r_1)}(W_{i-r_1} - \Xi_2(i-r_1)) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} Y_i &= G_1^{(1)}Y_{i-1} + G_1^{(2)}Y_{i-2} + \dots G_1^{(r)}Y_{i-r} + G_2^{(0)}W_i + G_2^{(1)}W_{i-1} + \\ &+ \dots G_2^{(r_1)}W_{i-r_1} + \Xi_1(i) - G_1^{(1)}\Xi_1(i-1) - G_1^{(2)}\Xi_1(i-2) - \\ &- \dots G_1^{(r)}\Xi_1(i-r) - G_2^{(0)}\Xi_2(i) - G_2^{(1)}\Xi_2(i-1) - \dots G_2^{(r_1)}\Xi_2(i-r_1) \end{aligned}$$

Представим данное уравнение в виде скалярных уравнений $\left(j = \overline{1, p_2}\right)$:

$$\begin{aligned} y_i^{(j)} &= b_{j\bullet}^{(1)}Y_{i-1} + \dots b_{j\bullet}^{(r)}Y_{i-r} + a_{j\bullet}^{(0)}W_i + \dots a_{j\bullet}^{(r_1)}W_{i-r_1} + \\ &+ \xi_1^{(j)}(i) - b_{j\bullet}^{(1)}\Xi_1(i-1) - \dots b_{j\bullet}^{(r)}\Xi_1(i-r) - a_{j\bullet}^{(0)}\Xi_2(i) - \dots a_{j\bullet}^{(r_1)}\Xi_2(i-r_1) \end{aligned} \tag{2}$$

где

$b_{j\bullet}^{(1)} - j$ строка матрицы $G_1^{(1)}$,

$b_{j\bullet}^{(r)} - j$ строка матрицы $G_1^{(r)}$,

$a_{j\bullet}^{(0)} - j$ строка матрицы $G_2^{(0)}$,

$a_{j\bullet}^{(r_1)} - j$ строка матрицы $G_2^{(r_1)}$.

Уравнение (2) можно записать следующим образом, если ввести обозначения:

$\bar{b}_{j\bullet} = \left|b_{j\bullet}^{(1)} \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; b_{j\bullet}^{(r)}\right|$, $\bar{a}_{j\bullet} = \left|a_{j\bullet}^{(0)} \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; a_{j\bullet}^{(r_1)}\right|$;

$$Y_r(i-1) = \left|Y_{i-1}^T \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; Y_{i-r}^T\right\|^T,$$

$$W_{r_1}(i) = \left|W_i^T \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; W_{i-r_1}^T\right\|^T;$$

$$\Xi_r(i-1) = \left|\Xi_1^T(i-1) \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; \Xi_1^T(i-r)\right|^T,$$

$$\Xi_{r_1}(i) = \left|\Xi_2^T(i) \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; \Xi_2^T(i-r_1)\right|^T.$$

Тогда

$$y_i^{(j)} = \left|\bar{b}_{j\bullet} \;\vdots\; \bar{a}_{j\bullet}\right| \left(\frac{Y_r(i-1)}{W_{r_1}(i)}\right) + \xi_1^{(j)}(i) - \bar{b}_{j\bullet}\Xi_r(i-1) - \bar{a}_{j\bullet}\Xi_{r_1}(i).$$

Введём следующую обобщённую ошибку для j – уравнения:

$$e^{(j)}(\bar{b}_{j\bullet}, \bar{a}_{j\bullet}, i) = \xi_1^{(j)}(i) - \bar{b}_{j\bullet}\Xi_r(i-1) - \bar{a}_{j\bullet}\Xi_{r_1}(i).$$

Из условий 4^0 и 5^0 следует, что обобщённая ошибка имеет нулевое среднее, а её локальная дисперсия с вероятностью 1 равна:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(e^{(j)}(\bar{b}_{j\bullet}, \bar{a}_{j\bullet}, i)\right)^2 = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}((\xi_1^{(j)}(i))^2 +$$

$$+\bar{b}_{j\bullet}\Xi_r(i-1)\Xi_r^T(i-1)\bar{b}_{j\bullet}^T + \bar{a}_{j\bullet}\Xi_{r_1}(i)\Xi_{r_1}^T(i)\bar{a}_{j\bullet}^T - 2\xi_1^{(j)}(i)\bar{b}_{j\bullet}\Xi_r(i-1)) =$$

$$= d_{jj}^{(1)} + \bar{b}_{j\bullet}H_{\Xi_1}^{*}\bar{b}_{j\bullet}^T + \bar{a}_{j\bullet}H_{\Xi_2}^{*}\bar{a}_{j\bullet}^T - 2h_{\Xi_1 j\bullet}^{*}\bar{b}_{j\bullet}^T = \omega(\bar{b}_{j\bullet}, \bar{a}_{j\bullet}),$$

п.н., $d_{jj}^{(1)} \in D_1$, $j = \overline{1, p_2}$.

Определим оценки $\left|\hat{\bar{b}}_{j\bullet} \;\vdots\; \hat{\bar{a}}_{j\bullet}\right|$ неизвестных истинных значений параметров $\left|\bar{b}_{j\bullet} \;\vdots\; \bar{a}_{j\bullet}\right|$ из условия минимума суммы взвешенных квадратичных отклонений $e^{(j)}(b_{j\bullet}, a_{j\bullet}, i)$ с весом $\omega(b_{j\bullet}, a_{j\bullet})$:

$$\min_{\left(\frac{b_{j\bullet}}{a_{j\bullet}}\right)^T \in \bar{B}} \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(y_i^{(j)} - \left|b_{j\bullet} \;\vdots\; a_{j\bullet}\right|\left(\frac{Y_r(i-1)}{W_{r_1}(i)}\right)\right)^2}{d_{jj}^{(1)} + b_{j\bullet}H_{\Xi_1}^{*}b_{j\bullet}^T + a_{j\bullet}H_{\Xi_2}^{*}a_{j\bullet}^T - 2h_{\Xi_1 j\bullet}^{*}b_{j\bullet}^T}. \tag{3}$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1.

Пусть стационарная динамическая система с нулевыми начальными условиями описывается уравнением (1) и помехи удовлетворяют предположениям 2^0, 4^0, 5^0. Кроме того, истинные значения параметров $\left|\bar{b}_{j\bullet} \;\vdots\; \bar{a}_{j\bullet}\right|$ и входной сигнал удовлетворяют условиям 1^0, 3^0. Тогда при $N \to \infty$ с вероятностью 1 существует оценка $\left|\hat{\bar{b}}_{j\bullet} \;\vdots\; \hat{\bar{a}}_{j\bullet}\right|$, определяемая выражением (3) и являющаяся сильно состоятельной оценкой:

$$\left|\hat{\bar{b}}_{j\bullet} \;\vdots\; \hat{\bar{a}}_{j\bullet}\right| \xrightarrow[N\to\infty]{П.Н.} \left|\bar{b}_{j\bullet} \;\vdots\; \bar{a}_{j\bullet}\right|.$$

Доказательство утверждения 1.

Рассмотрим функцию:

$$\frac{1}{N}U_N(b_{j\bullet}, a_{j\bullet}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(y_i^{(j)} - \left|b_{j\bullet} \;\vdots\; a_{j\bullet}\right|\left|\frac{Y_r(i-1)}{W_{r_1}(i)}\right|\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(z_i^{(j)} + \xi_1^{(j)}(i) - (Z_r^T(i-1) + \Xi_r^T(i-1))b_{j\bullet}^T - (X_{r_1}^T(i) + \Xi_{r_1}^T(i))a_{j\bullet}^T\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\xi_1^{(j)}(i) + Z_r^T(i-1)\bar{b}_{j\bullet}^T + X_{r_1}^T(i)\bar{a}_{j\bullet}^T - (Z_r^T(i-1) + \Xi_r^T(i-1))b_{j\bullet}^T -$$

$$-(X_{r_1}^T(i) + \Xi_{r_1}^T(i))a_{j\bullet}^T)^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\xi_1^{(j)}(i) - Z_r^T(i-1)\tilde{b}_{j\bullet}^T - X_{r_1}^T(i)\tilde{a}_{j\bullet}^T -$$

$$-\Xi_r^T(i-1)b_{j\bullet}^T - \Xi_{r_1}^T(i)a_{j\bullet}^T)^2 = v_1 + v_2 + v_3,$$

где $\tilde{b}_{j\bullet} = b_{j\bullet} - \bar{b}_{j\bullet}$, $\tilde{a}_{j\bullet} = a_{j\bullet} - \bar{a}_{j\bullet}$;

$$v_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}((\xi_1^{(j)}(i))^2 + b_{j\bullet}\Xi_r(i-1)\Xi_r^T(i-1)b_{j\bullet}^T + a_{j\bullet}\Xi_{r_1}(i)\Xi_{r_1}^T(i)a_{j\bullet}^T +$$

$$+2b_{j\bullet}\Xi_r(i-1)\Xi_{r_1}^T(i)a_{j\bullet}^T - 2\xi_1^{(j)}(i)\Xi_r^T(i-1)b_{j\bullet}^T - 2\xi_1^{(j)}\Xi_{r_1}^T(i)a_{j\bullet}^T),$$

$$v_2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\left|\tilde{b}_{j\bullet} \;\vdots\; \tilde{a}_{j\bullet}\right|\left|Z_r^T(i-1) \;\vdots\; X_{r_1}^T(i)\right|^T\left|Z_r^T(i-1) \;\vdots\; X_{r_1}^T(i)\right|\left|\tilde{b}_{j\bullet} \;\vdots\; \tilde{a}_{j\bullet}\right|^T\right),$$

$$v_3 = 2\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(-\xi_1^{(j)}(i)Z_r^T(i-1)\tilde{b}_{j\bullet}^T - \xi_1^{(j)}(i)X_{r_1}^T(i)\tilde{a}_{j\bullet}^T + b_{j\bullet}\Xi_r(i-1)Z_r^T(i-1)\tilde{b}_{j\bullet}^T +$$

$$+b_{j\bullet}\Xi_r(i-1)X_{r_1}^T(i)\tilde{a}_{j\bullet}^T + a_{j\bullet}\Xi_{r_1}(i)Z_r^T(i-1)\tilde{b}_{j\bullet}^T + a_{j\bullet}\Xi_{r_1}(i)X_{r_1}^T(i)\tilde{a}_{j\bullet}^T).$$

Тогда из условий 4^0 и 5^0 получим, что:

$$v_1 \xrightarrow[N\to\infty]{П.Н.} d_{jj}^{(1)} + b_{j\bullet}H_{\Xi_1}^{*}b_{j\bullet}^T + a_{j\bullet}H_{\Xi_2}^{*}a_{j\bullet}^T - 2h_{\Xi_1 j\bullet}^{*}b_{j\bullet}^T$$

$$\forall\left|b_{j\bullet} \;\vdots\; a_{j\bullet}\right| \in \bar{B},$$

а из условия 2^0 следует:

$$v_2 \xrightarrow[N\to\infty]{Ï.Í.} \left|\tilde{b}_{j\bullet} \;\vdots\; \tilde{a}_{j\bullet}\right| H \left|\tilde{b}_{j\bullet} \;\vdots\; \tilde{a}_{j\bullet}\right|^T.$$

Первые два слагаемых в v_3 в силу условий 2^0, 3^0, 4^0 удовлетворяют условиям леммы [1] и следовательно:

$$N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\left(-\xi_1^{(j)}(i)Z_r^T(i-1)\widetilde{b}_{j\bullet}^T\right)\xrightarrow[N\to\infty]{П.Н.}0,$$

$$N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\left(-\xi_1^{(j)}(i)X_{r_1}^T(i)\widetilde{a}_{j\bullet}^T\right)\xrightarrow[N\to\infty]{П.Н.}0.$$

Заметим, что

$$N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\left(b_{j\bullet}\Xi_r(i-1)Z_r^T(i-1)\widetilde{b}_{j\bullet}^T\right)=$$

$$=N^{-1}\sum_{i=1}^{N}b_{j\bullet}\left|\begin{array}{c:c:c} \Xi_1(i-1)Z_{i-1}^T & \cdots & \Xi_1(i-1)Z_{i-r}^T \\ \hdashline \vdots & \vdots & \vdots \\ \hdashline \Xi_1(i-r)Z_{i-1}^T & \cdots & \Xi_1(i-r)Z_{i-r}^T \end{array}\right|\widetilde{b}_{j\bullet}^T \tag{4}$$

Таким образом, (4) можно представить в виде r^2 слагаемых, каждое из которых в силу предположений 2^0, 3^0, 4^0 по лемме [1] сходится к нулю.

Аналогично доказывается сходимость к нулю остальных слагаемых v_3:

$$v_3\xrightarrow[N\to\infty]{\text{Ï.Í.}}0,\ \forall\left|b_{j\bullet}\ \vdots\ a_{j\bullet}\right|\in\overline{B}.$$

Следовательно:

$$\frac{1}{N}U_N(b_{j\bullet},a_{j\bullet})\xrightarrow[N\to\infty]{\text{Ï.Í.}}(d_{jj}^{(1)}+b_{j\bullet}H_{\Xi_1}^*b_{j\bullet}^T+a_{j\bullet}H_{\Xi_2}^*a_{j\bullet}^T-2h_{\Xi_1 j\bullet}^*b_{j\bullet}^T+$$

$$+\left|\widetilde{b}_{j\bullet}\ \vdots\ \widetilde{a}_{j\bullet}\right|H\left|\widetilde{b}_{j\bullet}\ \vdots\ \widetilde{a}_{j\bullet}\right|^T=\overline{U}(b_{j\bullet},a_{j\bullet})$$

или

$$\overline{U}(b_{j\bullet},a_{j\bullet})=d_{jj}^{(1)}+\left|b_{j\bullet}\ \vdots\ a_{j\bullet}\right|\left|\begin{array}{c:c} H_{zz}+H_{\Xi_1}^* & H_{zx} \\ \hdashline H_{zx}^T & H_{xx}+H_{\Xi_2}^* \end{array}\right|\left|b_{j\bullet}\ \vdots\ a_{j\bullet}\right|^T+$$

$$+\left|\overline{b}_{j\bullet}\ \vdots\ \overline{a}_{j\bullet}\right|H\left|\overline{b}_{j\bullet}\ \vdots\ \overline{a}_{j\bullet}\right|^T-2\left|\begin{array}{c} H_{zz}\overline{b}_{j\bullet}^T+H_{zx}\overline{a}_{j\bullet}^T+(h_{\Xi_1 j\bullet}^*)^T \\ \hdashline H_{zx}^T\overline{b}_{j\bullet}^T+H_{xx}\overline{a}_{j\bullet}^T \end{array}\right|^T\left|b_{j\bullet}\ \vdots\ a_{j\bullet}\right|^T.$$

Покажем, что решение задачи

$$\min\omega^{-1}(b_{j\bullet},a_{j\bullet})\overline{U}(b_{j\bullet},a_{j\bullet}) \tag{5}$$

существует и достигается в единственной точке. Для этого вместе с задачей (5) рассмотрим функции:

$$V(b_{j\bullet},a_{j\bullet},\Theta^{(j)})=\overline{U}(b_{j\bullet},a_{j\bullet})-\Theta^{(j)}\omega(b_{j\bullet},a_{j\bullet}),$$

$$\Theta^{(j)}\in R_1,$$

$$V(\Theta^{(j)})=\min_{\left|b_{j\bullet}\ \vdots\ a_{j\bullet}\right|\in\overline{B}}V(b_{j\bullet},a_{j\bullet},\Theta^{(j)}).$$

Тогда

$$V(b_{j\bullet},a_{j\bullet},\Theta^{(j)})=d_{jj}^{(1)}(1-\Theta^{(j)})+\left|\overline{b}_{j\bullet}\ \vdots\ \overline{a}_{j\bullet}\right|H\left|\overline{b}_{j\bullet}\ \vdots\ \overline{a}_{j\bullet}\right|^T+$$

$$+\left|b_{j\bullet}\ \vdots\ a_{j\bullet}\right|\left|\begin{array}{c:c} H_{zz}+H_{\Xi_1}^*-\Theta^{(j)}H_{\Xi_1}^* & H_{zx} \\ \hdashline H_{zx}^T & H_{xx}+H_{\Xi_2}^*-\Theta^{(j)}H_{\Xi_2}^* \end{array}\right|\left|b_{j\bullet}\ \vdots\ a_{j\bullet}\right|^T-$$

$$-2\left|\begin{array}{c} H_{zz}\overline{b}_{j\bullet}^T+H_{zx}\overline{a}_{j\bullet}^T+(1-\Theta^{(j)})(h_{\Xi_1 j\bullet}^*)^T \\ \hdashline H_{zx}^T\overline{b}_{j\bullet}^T+H_{xx}\overline{a}_{j\bullet}^T \end{array}\right|^T\left|b_{j\bullet}\ \vdots\ a_{j\bullet}\right|^T.$$

Дифференцируя $V(b_{j\bullet},a_{j\bullet},\Theta^{(j)})$ по $\left|b_{j\bullet}\ \vdots\ a_{j\bullet}\right|$ и приравнивая производную к нулю, получим

$$\left|b_{j\bullet}(\Theta^{(j)})\ \vdots\ a_{j\bullet}(\Theta^{(j)})\right|^T=\left|H+H_{\Xi_{1,2}}^*-\Theta^{(j)}H_{\Xi_{1,2}}^*\right|^{-1}\cdot$$

$$\cdot\left|\begin{array}{c} H_{zz}\overline{b}_{j\bullet}^T+H_{zx}\overline{a}_{j\bullet}^T+(1-\Theta^{(j)})(h_{\Xi_1 j\bullet}^*)^T \\ \hdashline H_{zx}^T\overline{b}_{j\bullet}^T+H_{xx}\overline{a}_{j\bullet}^T \end{array}\right|. \tag{6}$$

Тогда

$$V(\Theta^{(j)})=d_{jj}^{(1)}(1-\Theta^{(j)})+\left|\overline{b}_{j\bullet}\ \vdots\ \overline{a}_{j\bullet}\right|H\left|\overline{b}_{j\bullet}\ \vdots\ \overline{a}_{j\bullet}\right|^T-$$

$$-\left|\begin{array}{c} H_{zz}\overline{b}_{j\bullet}^T+H_{zx}\overline{a}_{j\bullet}^T+(1-\Theta^{(j)})(h_{\Xi_1 j\bullet}^*)^T \\ \hdashline H_{zx}^T\overline{b}_{j\bullet}^T+H_{xx}\overline{a}_{j\bullet}^T \end{array}\right|^T\cdot$$

$$\cdot\left|\begin{array}{c:c} H_{zz}+H_{\Xi_1}^*-\Theta^{(j)}H_{\Xi_1}^* & H_{zx} \\ \hdashline H_{zx}^T & H_{xx}+H_{\Xi_2}^*-\Theta^{(j)}H_{\Xi_2}^* \end{array}\right|^{-1}\cdot$$

$$\cdot\left|\begin{array}{c} H_{zz}\overline{b}_{j\bullet}^T+H_{zx}\overline{a}_{j\bullet}^T+(1-\Theta^{(j)})(h_{\Xi_1 j\bullet}^*)^T \\ \hdashline H_{zx}^T\overline{b}_{j\bullet}^T+H_{xx}\overline{a}_{j\bullet}^T \end{array}\right|.$$

Легко проверить, что уравнение $V(\Theta^{(j)})=0$ на интервале $\left(-\infty,\lambda_{\min}+1\right)$ имеет корень $\hat{\Theta}=1$, если $\lambda_{\min}$ - наименьшее собственное число регулярного пучка квадратичных форм, определяемых положительно определёнными матрицами H и $H_{\Xi_{1,2}}^*$, и $\lambda_{\min}>0$. Этот корень является единственным на интервале $\left(-\infty,\lambda_{\min}+1\right)$, что вытекает из непрерывности функции $V(\Theta^{(j)})$ на этом интервале и $\dot{V}(\Theta^{(j)})<0$ на $(-\infty,\lambda_{\min}+1)$, и из (6) непосредственно следует существование и единственность (5). В дальнейшем ход доказательства практически полностью аналогичен доказательству при условии, что $p_1=p_2=1$ [1].

Для получения численного метода вычисления оценок матриц из критерия (3) рассмотрим функции:

$$V_N(b_{j\bullet},a_{j\bullet},\Theta^{(j)})=U_N(b_{j\bullet},a_{j\bullet})-\Theta^{(j)}\omega(b_{j\bullet},a_{j\bullet}),$$

$$V_N(\Theta^{(j)})=\min_{|b_{j\bullet}\,\vdots\,a_{j\bullet}|\in\bar{B}}V_N(b_{j\bullet},a_{j\bullet},\Theta^{(j)}),$$

$$\Theta^{(j)}\in R_1.$$

Критерий (3) можно записать в виде

$$\min_{|b_{j\bullet}\,\vdots\,a_{j\bullet}|\in\bar{B}}\frac{\left(Y^{(j)}-|A_Y\,\vdots\,A_W\|b_{j\bullet}\,\vdots\,a_{j\bullet}|^T,Y^{(j)}-|A_Y\,\vdots\,A_W\|b_{j\bullet}\,\vdots\,a_{j\bullet}|^T\right)}{\omega(b_{j\bullet},a_{j\bullet})},\tag{7}$$

где

$$Y^{(j)}=\left|y_1^{(j)}\,\vdots\,\cdots\,\vdots\,y_N^{(j)}\right|^T,$$

$$A_Y=\begin{vmatrix}Y_0^T & \cdots & Y_{1-r}^T\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ Y_{N-1}^T & \cdots & Y_{N-r}^T\end{vmatrix},$$

$$A_W=\begin{vmatrix}W_1^T & \cdots & W_{1-r_1}^T\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ W_N^T & \cdots & W_{N-r_1}^T\end{vmatrix},$$

$$Y_i=\left|y_i^{(1)}\,\vdots\,\cdots\,\vdots\,y_i^{(p_2)}\right|^T,$$

$$W_i=\left|w_i^{(1)}\,\vdots\,\cdots\,\vdots\,w_i^{(p_1)}\right|^T.$$

Тогда

$$V_N(b_{j\bullet},a_{j\bullet},\Theta^{(j)})=((Y^{(j)})^T-|b_{j\bullet}\,\vdots\,a_{j\bullet}\|A_Y\,\vdots\,A_W|^T)\cdot$$
$$\cdot(Y^{(j)}-|A_Y\,\vdots\,A_W\|b_{j\bullet}\,\vdots\,a_{j\bullet}|^T)-$$
$$-\Theta^{(j)}(d_{jj}^{(1)}+b_{j\bullet}H_{\Xi_1}^*b_{j\bullet}^T+a_{j\bullet}H_{\Xi_2}^*a_{j\bullet}^T-2h_{\Xi_1 j\bullet}^*b_{j\bullet}^T)=$$
$$=(Y^{(j)})^TY^{(j)}-\Theta^{(j)}d_{jj}^{(1)}+|b_{j\bullet}\,\vdots\,a_{j\bullet}|\begin{vmatrix}A_Y^TA_Y-\Theta^{(j)}H_{\Xi_1}^* & A_Y^TA_W\\ A_W^TA_Y & A_W^TA_W-\Theta^{(j)}H_{\Xi_2}^*\end{vmatrix}\cdot$$
$$\cdot|b_{j\bullet}\,\vdots\,a_{j\bullet}|^T-2|(Y^{(j)})^TA_Y-\Theta^{(j)}h_{\Xi_1 j\bullet}^*\,\vdots\,(Y^{(j)})^TA_W\|b_{j\bullet}\,\vdots\,a_{j\bullet}|^T.$$

Дифференцируя $V_N(b_{j\bullet},a_{j\bullet},\Theta^{(j)})$ по $|b_{j\bullet}\,\vdots\,a_{j\bullet}|$ и приравнивая производную к нулю, получим

$$\begin{vmatrix}A_Y^TA_Y-\Theta^{(j)}H_{\Xi_1}^* & A_Y^TA_W\\ A_W^TA_Y & A_W^TA_W-\Theta^{(j)}H_{\Xi_2}^*\end{vmatrix}|b_{j\bullet}\,\vdots\,a_{j\bullet}|^T=$$
$$=\begin{vmatrix}A_Y^TY^{(j)}-\Theta^{(j)}(h_{\Xi_1 j\bullet}^*)^T\\ A_W^TY^{(j)}\end{vmatrix}.\tag{8}$$

Тогда

$$V_N(\Theta^{(j)})=(Y^{(j)})^TY^{(j)}-\Theta^{(j)}d_{jj}^{(1)}-\begin{vmatrix}A_Y^TY^{(j)}-\Theta^{(j)}(h_{\Xi_1 j\bullet}^*)^T\\ A_W^TY^{(j)}\end{vmatrix}^T\cdot$$
$$\cdot\begin{vmatrix}A_Y^TA_Y-\Theta^{(j)}H_{\Xi_1}^* & A_Y^TA_W\\ A_W^TA_Y & A_W^TA_W-\Theta^{(j)}H_{\Xi_2}^*\end{vmatrix}^{-1}\begin{vmatrix}A_Y^TY^{(j)}-\Theta^{(j)}(h_{\Xi_1 j\bullet}^*)^T\\ A_W^TY^{(j)}\end{vmatrix}.\tag{9}$$

Имеет место следующая лемма.

Для функции $V_N(\Theta^{(j)})$, связанной с задачей (3), имеет место:

1) все корни уравнения $V_N(\Theta^{(j)})=0$ (если они существуют) неотрицательны;

2) уравнение (9) имеет на полусегменте $[0,\lambda_{\min}(N))$ не более одного корня $\hat{\Theta}^{(j)}(N)$, где $\lambda_{\min}$ - минимальное обобщённое число матрицы, т.е. корень уравнения

$$\det\left\{\begin{vmatrix}A_Y^TA_Y & A_Y^TA_W\\ A_W^TA_Y & A_W^TA_W\end{vmatrix}-\Theta^{(j)}\begin{vmatrix}H_{\Xi_1}^* & 0\\ 0^T & H_{\Xi_2}^*\end{vmatrix}\right\}=0;\tag{10}$$

3) существование $\hat{\Theta}^{(j)}(N)$ на полусегменте $[0,\lambda_{\min}(N))$ - необходимое и достаточ-

ное условие существования единственного решения (7).

Доказательство.

Функция $V_N(\Theta^{(j)})$ непрерывна на $[0, \lambda_{\min}(N))$, к тому же $\lambda_{\min} \geq 0$ как обобщённое собственное число неотрицательно определённой матрицы. Далее, $\dot{V}_N(\Theta^{(j)}) \leq 0$, тогда на полусегменте $[0, \lambda_{\min}(N))$ имеется не более одного корня, если он существует. Также $V_N(0) \geq 0$ и, следовательно, $V_N(\Theta^{(j)}) > 0$ (матрица

$$I_N - \left|\begin{array}{c} A_Y^T Y^{(j)} \\ \hdashline A_W^T Y^{(j)} \end{array}\right|^T \left|\begin{array}{c:c} A_Y^T A_Y & A_Y^T A_W \\ \hdashline A_W^T A_Y & A_W^T A_W \end{array}\right|^{-1} \left|\begin{array}{c} A_Y^T Y^{(j)} \\ \hdashline A_W^T Y^{(j)} \end{array}\right|$$

идемпотентная).

Отсюда вытекает доказательство утверждения 1, 2 и достаточность 3. Необходимость 3 вытекает из экстремальных свойств характеристических чисел регулярного пучка форм [2].

Утверждение 2.

Пусть выполняются все условия 1^0-5^0, тогда с вероятностью 1 при $N \to \infty$ существует корень $\hat{\Theta}^{(j)}(N) \in [0, \lambda_{\min})$ и единственное решение (8), которое является также решением задачи (7).

Доказательство утверждения 2 непосредственно следует из утверждения 1 и леммы.

На основании утверждения 2 может быть получен численный метод, который позволяет:

- ответить на вопрос, существует ли единственная оценка $\left|\hat{\bar{b}}_{j\bullet} \;\vdots\; \hat{\bar{a}}_{j\bullet}\right|$;

- определить начальное приближение, гарантирующее сходимость итерационного процесса к единственной оценке $\left|\hat{\bar{b}}_{j\bullet} \;\vdots\; \hat{\bar{a}}_{j\bullet}\right|$;

- вычислить с любой наперёд заданной точностью эту оценку.

Утверждение 3.

Пусть последовательность $\left\{\Theta_1^{(j)}\right\}$ определяется следующим алгоритмом.

Шаг 0. $\Theta_1^{(j)}(0) = 0$.

Шаг 1. $\Theta_1^{(j)}(i) = \dfrac{\lambda_{\min}(N) + \Theta_1^{(j)}(i-1)}{2}$,

$\lambda_{\min}$ определяется из (10).

Шаг 2. Вычислить $\hat{\bar{b}}_{j\bullet}\left(N, \hat{\Theta}_1^{(j)}(i)\right)$ и $\hat{\bar{a}}_{j\bullet}\left(N, \hat{\Theta}_1^{(j)}(i)\right)$ из системы уравнений (8).

Шаг 3. Вычислить

$$V_N(\hat{\Theta}_1^{(j)}(i)) = (Y^{(j)})^T Y^{(j)} - \hat{\Theta}_1^{(j)}(i) d_{jj}^{(1)} - \left|\begin{array}{c} A_Y^T Y^{(j)} - \hat{\Theta}_1^{(j)}(i)(h^*_{\Xi_1 j\bullet})^T \\ \hdashline A_W^T Y^{(j)} \end{array}\right|^T \cdot$$

$$\cdot \left|\hat{\bar{b}}_{j\bullet}\left(N, \hat{\Theta}_1^{(j)}(i)\right) \;\vdots\; \hat{\bar{a}}_{j\bullet}\left(N, \hat{\Theta}_1^{(j)}(i)\right)\right|^T.$$

Шаг 4. Проверить условие $V_N(\hat{\Theta}_1^{(j)}(i)) \leq 0$.

Тогда, если уравнение $V_N(\Theta_1^{(j)}) = 0$ имеет корень $\hat{\Theta}_1^{(j)}(N) \in [0, \lambda_{\min}(N))$, то последовательность $\Theta_1^{(j)}(0), \ldots \Theta^{(j)}(0)$ конечна и $\Theta^{(j)}(0) \in \left[\hat{\Theta}_1^{(j)}(N), \lambda_{\min}(N)\right)$, в противном случае $\left\{\Theta_1^{(j)}(i)\right\}$ - бесконечна.

Доказательство утверждения 3 немедленно следует из леммы.

Этот алгоритм позволяет определить начальное приближение $\Theta^{(j)}(0)$, необходимое для дальнейшего применения метода Ньютона, или определить, что корень $\hat{\Theta}_1^{(j)}(N)$ не существует.

Утверждение 4.

Пусть существует

$\Theta^{(j)}(0) \in \left[\hat{\Theta}_1^{(j)}(N), \lambda_{\min}(N)\right)$, тогда

$$\lim_{i \to \infty} \Theta^{(j)}(i) = \Theta^{(j)}(N),$$

$$\lim_{i \to \infty} \hat{\bar{b}}_{j\bullet}(i, \Theta^{(j)}(i)) = \hat{\bar{b}}_{j\bullet}(N),$$

$$\lim_{i \to \infty} \hat{\bar{a}}_{j\bullet}(i, \Theta^{(j)}(i)) = \hat{\bar{a}}_{j\bullet}(N),$$

где $\Theta^{(j)}(i)$, $\hat{\bar{b}}_{j\bullet}(i,\Theta^{(j)}(i))$ и $\hat{\bar{a}}_{j\bullet}(i,\Theta^{(j)}(i))$ определяются совместно следующим алгоритмом.

Шаг 1. Вычислить $\hat{\bar{b}}_{j\bullet}(N,\Theta^{(j)}(i))$ и $\hat{\bar{a}}_{j\bullet}(N,\Theta^{(j)}(i))$ из системы уравнений (8).

Шаг 2. Вычислить

$$\hat{\Theta}^{(j)}(i+1)=\Bigg(d_{jj}^{(1)}+\left|\hat{\bar{b}}_{j\bullet}(N,\hat{\Theta}(i))\ \vdots\ \hat{\bar{a}}_{j\bullet}(N,\hat{\Theta}(i))\right|\left|\begin{array}{c:c}H^{*}_{\Xi_1} & 0\\ \hdashline 0^{T} & H^{*}_{\Xi_2}\end{array}\right|\cdot$$

$$\cdot\left|\hat{\bar{b}}_{j\bullet}(N,\hat{\Theta}(i))\ \vdots\ \hat{\bar{a}}_{j\bullet}(N,\hat{\Theta}(i))\right|^{T}-2\left|h^{*}_{\Xi_1 j\bullet}\ \vdots\ 0\right|\left|\hat{\bar{b}}_{j\bullet}(N,\hat{\Theta}(i))\ \vdots\ \hat{\bar{a}}_{j\bullet}(N,\hat{\Theta}(i))\right|^{T}\Bigg)^{-1}\cdot$$

$$\cdot\Bigg\{(Y^{(j)})^{T}Y^{(j)}+\hat{\Theta}^{(j)}(i)\Bigg[\left|\hat{\bar{b}}_{j\bullet}(N,\hat{\Theta}(i))\ \vdots\ \hat{\bar{a}}_{j\bullet}(N,\hat{\Theta}(i))\right|\left|\begin{array}{c:c}H^{*}_{\Xi_1} & 0\\ \hdashline 0^{T} & H^{*}_{\Xi_2}\end{array}\right|\cdot$$

$$\cdot\left|\hat{\bar{b}}_{j\bullet}(N,\hat{\Theta}(i))\ \vdots\ \hat{\bar{a}}_{j\bullet}(N,\hat{\Theta}(i))\right|^{T}-2\left|h^{*}_{\Xi_1 j\bullet}\ \vdots\ 0\right|\left|\hat{\bar{b}}_{j\bullet}(N,\hat{\Theta}(i))\ \vdots\ \hat{\bar{a}}_{j\bullet}(N,\hat{\Theta}(i))\right|^{T}\Bigg]-$$

$$-\left|\frac{A_Y^{T}Y^{(j)}-\Theta^{(j)}(i)(h^{*}_{\Xi_1 j\bullet})^{T}}{A_W^{T}Y^{(j)}}\right|^{T}\left|\hat{\bar{b}}_{j\bullet}(N,\hat{\Theta}(i))\ \vdots\ \hat{\bar{a}}_{j\bullet}(N,\hat{\Theta}(i))\right|^{T}\Bigg\}.$$

Шаг 3. Переход к шагу 1.

Вычисления заканчиваются, если выполняется условие:

$$\frac{\left\|V_N\left(\Theta^{(j)}(i+1)\right)-V_N\left(\Theta^{(j)}(i)\right)\right\|}{\left\|V_N\left(\Theta^{(j)}(i+1)\right)\right\|}\le\delta,$$

где δ - априорно заданная точность нахождения оценки.

Это утверждение непосредственно следует из метода Ньютона:

$$\Theta^{(j)}(i+1)=\Theta^{(j)}(i)-\frac{V_N\left(\Theta^{(j)}(i)\right)}{\dot{V}_N\left(\Theta^{(j)}(i)\right)}.$$

Обоснованность использования метода Ньютона вытекает из того, что функция $V_N\left(\Theta^{(j)}\right)$ непрерывна на $\forall\Theta^{(j)}\in\left[0,\lambda_{\min}(N)\right)$ и $\dot{V}_N\left(\Theta^{(j)}\right)\le 0$ и $\ddot{V}_N\left(\Theta^{(j)}\right)\le 0$ на $\forall\Theta^{(j)}\in\left[0,\lambda_{\min}(N)\right)$.

На основе вышеописанного алгоритма в среде Matlab создано программное обеспечение, позволяющее получать оценки матриц параметров. В качестве результата работы приложения Identification на рис. 1 приведены графики значений последовательности $\{Z_i\}$, а также значений последовательностей моделей $\left\{\hat{Z}_i^{\,МНК}\right\}$ и $\left\{\hat{Z}_i^{\,НМНК}\right\}$.

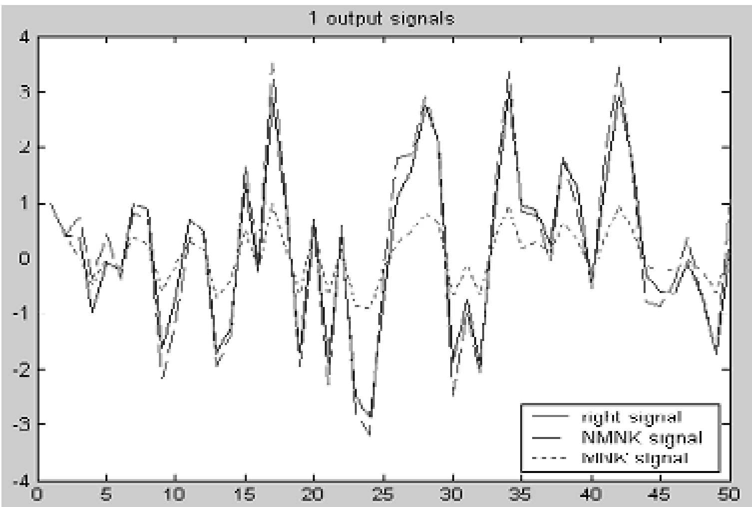

Рис. 1. Графики значений последовательностей $\{Z_i\}$, $\left\{\hat{Z}_i^{\,МНК}\right\}$ *и* $\left\{\hat{Z}_i^{\,НМНК}\right\}$

Библиографический список

1. Кацюба О. А., Жданов А. И. О состоятельности оценок наименьших квадратов параметров линейных разностных уравнений при автокоррелированных помехах// Изв. АН СССР. Кибернетика. - 1983. - №5. –С. 102-107.

2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. - М.: Наука, 1966. – 575 с.

References

1. Katsyuba O. A., Zhdanov A. I. Consistency of linear difference equation parameter least square estimates for autocorrelated interference // Bulletin of USSR Academy of Sciences. Cybernetics. 1983. No. 5. 102-107 pp.

2. Gantmakher F. R. Matrix theory. - Moscow: Nauka, 1966 - 575 pp.

DEFINING PARAMETERS OF A LINEAR DYNAMIC SYSTEM MULTIDIMENSIONAL AT THE INPUT AND OUTPUT GIVEN AUTORORRELATED SIGNAL INTERFERENCE

© 2009 A. A. Karpov, O. A. Katsyuba

Samara State Communications University

The paper deals with the theory and method of solving the problem of consistent evaluation of multidimensional linear difference equation parameters with autocorrelated interference in input and output signals on the basis of least square method generalization (as the most common in conditions of a priori uncertainty). The consistency of the obtained estimates of unknown true parameter values is proved.

Linear difference equations, parametric identification, multidimensal input and output, autocorrelated signal interference.

Информация об авторах

Карпов Андрей Анатольевич, программист, кафедра «Мехатроника в автоматизированных производствах», Самарский государственный университет путей сообщения, e-mail: forkontakte@yandex.ru. Область научных интересов: математическое и компьютерное моделирование.

Кацюба Олег Алексеевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Мехатроника в автоматизированных производствах», Самарский государственный университет путей сообщения, e-mail: asoiy@samiit.ru. Область научных интересов: теория идентификации систем автоматического управления.

Karpov Andrey Anatolyevitch, programmer of the department "Mechatronics in automated production", Samara State Communications University, e-mail: forkontakte@yandex.ru. Area of research: mathematical and computer modeling.

Katsyuba Oleg Alexeyevitch, head of the department "Mechatronics in automated productions", doctor of technical science, professor, Samara State Communications University, e-mail: asoiy@samiit.ru. Area of research: theory of automatic control system identification.