УДК 519.218.82

МЕТОД ОБНАРУЖЕНИЯ ФАКТА НАРУШЕНИЯ И ЕГО ДИАГНОСТИКИ В ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ В ПРОЦЕССЕ ФИЛЬТРАЦИИ

© 2009 Ю. В. Цыганова

Ульяновский государственный университет

Получен эффективный в вычислительном плане метод обнаружения факта нарушения и его идентификации в классе линейных стохастических систем управления в процессе фильтрации. Эффективность метода заключается в том, что решение принимается на ограниченном множестве значений функции отношения правдоподобия, причём сами значения вычисляются непосредственно в терминах величин, генерируемых фильтром.

Линейные стохастические системы, обнаружение факта нарушения, фильтр Калмана, функция правдоподобия, последовательный анализ.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим задачу обнаружения факта нарушения и идентификации характера изменений в функционировании линейной динамической системы, возмущаемой дискретным белым шумом, свойства которой в произвольные моменты времени могут изменяться. Подобные изменения будем называть нарушениями. В результате каждого нарушения система переходит на новый локально стационарный режим функционирования, определяемый номером p (p=0, …, M) и описываемый следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} x(t_{i+1}) \;&=\; \Phi_p(t_{i+1},t_i)x(t_i)+B_p(t_i)u(t_i)+ \\ &\quad+\Gamma_p(t_i)w(t_i), \end{aligned} \tag{1}$$

$$z(t_i)=H_p(t_i)x(t_i)+v(t_i), \tag{2}$$

где $\Phi_p(t_{i+1},t_i)$, $B_p(t_i)$, $\Gamma_p(t_i)$, $H_p(t_i)$ - матрицы-параметры системы; $x(t_i)$ - n-мерный вектор состояния системы, $u(t_i)$ - r-мерный вектор входного воздействия, $z(t_i)$ - доступный для наблюдения m-мерный вектор измерений, $w(t_i)$ и $v(t_i)$ - независимые нормально распределённые векторы шумов с нулевым средним и ковариационными матрицами $Q_p(t_i)$ и $R_p(t_i)$ соответственно. Начальный вектор состояния системы x_0 распределён по нормальному закону с математическим ожиданием $\bar{x}_p^0$ и ковариацией P_p^0.

Предположим, что момент возможного перехода системы из одного заданного режима в другой априорно неизвестен. Необходимо по результатам наблюдений на интервале $[0,N]$ подтвердить или опровергнуть факт этого нарушения, а также идентифицировать p – номер режима функционирования системы.

Как известно, наибольшим быстродействием в решении задач обнаружения нарушений отличаются методы, развитые в теории обнаружения изменений свойств случайных процессов, позволяющие оптимизировать структуру алгоритма по критерию скорейшего обнаружения нарушения. Впервые подобная проблема была рассмотрена Е. С. Пейджем [1]. Оптимальные правила остановки наблюдений, включая широко известную задачу о разладке, получены в работах А. Н. Ширяева [2]. В настоящее время данной проблеме посвящается большое число публикаций [3 - 5], например, разработке алгоритмов контроля в классе линейных стохастических систем посвящены, в частности, работы [6, 7]. Построенные здесь эвристические правила обнаружения, идентификации и оценивания моментов возникновения нарушений требуют вычисления постоянно увеличивающегося числа функций отношения правдоподобия, формируемых на основе выборок различной длины, для каждого возможного момента возникновения нарушения. Последнее обстоятельство и вызывает трудности в выводе математически обоснованного правила различения проверяемых гипотез о состоянии системы.

Построим правило обнаружения и идентификации параметрических изменений в модели объекта, позволяющее принять решение на фиксированном (включающем M элементов) множестве значений функций отношения правдоподобия.

Основные выкладки проведём для системы с двумя возможными режимами функционирования (p=0,1). Затем полученные результаты обобщим на случай M возможных нарушений.

2. Обнаружение факта нарушения в функционировании системы.

Предположим, что начальное состояние системы соответствует номинальному режиму функционирования с номером 0. Необходимо по результатам измерений $\mathrm{Z}(t_1,t_i)=[z(t_1),...,z(t_i)]^T$ подтвердить или опровергнуть факт перехода системы на режим функционирования с номером 1.

Решение этой задачи можно получить с помощью последовательного критерия отношения вероятностей Вальда [6 - 8]. Выбор из двух гипотез определяется решающим правилом:

$$\begin{cases} 1. & \textit{Если } \lambda(t_i)\le B, \textit{ тест прекращают} \\ & \textit{с выбором гипотезы } \mathrm{H}_0; \\ 2. & \textit{Если } \lambda(t_i)\ge A, \textit{ тест прекращают} \\ & \textit{с выбором гипотезы } \mathrm{H}_1; \\ 3. & \textit{Если } B<\lambda(t_i)<A, \textit{ тест продолжают} \\ & \textit{для } (i+1)-\textit{го шага}. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь $\lambda(t_i)=\dfrac{f_{\mathrm{N}(t_1,t_i)|\mathrm{H}_1}(x(t_1),...,x(t_i))}{f_{\mathrm{N}(t_1,t_i)|\mathrm{H}_0}(x(t_1),...,x(t_i))}$

– отношение правдоподобия, A и B – верхний и нижний пороги принятия решения, H_p – гипотезы, предполагающие функционирование системы в p-ом режиме (p=0,1); $\mathrm{N}(t_1,t_i)=[\nu(t_1),...,\nu(t_i)]^T$ – последовательность отсчётов процесса обновления, формируемого фильтрами Калмана, построенными в соответствии с различаемыми гипотезами.

Однако ввиду того, что момент возможного возникновения нарушения априорно неизвестен, приходится вместо одной альтернативной гипотезы H_0 вводить множество гипотез $\{\mathrm{H}_{11}, \mathrm{H}_{12},..., \mathrm{H}_{1i}\}$, предполагающих нарушение в каждый конкретный момент времени с начала наблюдения. С ростом числа измерений i число альтернативных гипотез также увеличивается, что в свою очередь приводит к росту числа функций отношения правдоподобия и необходимости разработки более сложного и, по существу, эвристического правила распознавания гипотез [6, 7].

Отличие предлагаемого в данной работе подхода состоит в представлении момента нарушения θ как случайного параметра с равномерным законом распределения.

Теорема 1. Пусть момент появления возможного нарушения в системе (1), (2) представляет собой дискретную случайную величину θ, равномерно распределённую на отрезке [0, i]. Тогда отношение функций правдоподобия в решающем правиле (3) вычисляется по выражениям:

$$\lambda(t_i)=\frac{1}{i}\sum_{k=1}^{i}\Psi_k^1(t_i),$$
$$\textit{где}\quad \Psi_k^1(t_i)=\prod_{j=k}^{i}\frac{f_{\nu_k(t_j)|\mathrm{H}_1}(x(t_j))}{f_{\nu_1(t_j)|\mathrm{H}_0}(x(t_j))}. \tag{4}$$

Доказательство. Согласно теореме умножения вероятностей и условию согласованности функций плотности распределения справедливо соотношение

$$f_{\mathrm{N}(t_1,t_i)|\mathrm{H}_1}(x(t_1),...,x(t_i))= \\ =\int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathrm{N}(t_1,t_i),\theta|\mathrm{H}_1}(x(t_1),...,x(t_i),y)dy= \tag{5}$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathrm{N}(t_1,t_i),\theta|\mathrm{H}_1}(x(t_1),...,x(t_i))f_{\theta|\mathrm{H}_1}(y)dy,$$

где

$$f_{\theta|H_1}(y)=f_\theta(y)=\begin{cases}\frac{1}{i}, 0<y<i,\\ 0, \text{иначе}\end{cases},$$

$f_{N(t_1,t_i),\theta|H_1}(x(t_1),...,x(t_i),y)$ — условная плотность распределения обобщённого вектора отсчётов процесса обновления $N(t_1,t_i)=[\nu(t_1),...,\nu(t_i)]^T$, снимаемых с фильтров Калмана, отвечающих гипотезе H_θ — нарушение произошло в момент времени t_θ. В отношении каждого из альтернативных фильтров Калмана это означает, что он должен активизироваться в соответствующий параметру θ момент времени.

Поскольку в нашем случае θ — дискретная случайная величина, интеграл в выражении (5) следует заменить суммой, а вместо непрерывной функции плотности распределения θ ввести соответствующие вероятности:

$$\begin{aligned}&f_{N(t_1,t_i),\theta|H_1}(x(t_1),...,x(t_i),y)=\\ &=\sum_{j=1}^{i}f_{N(t_j,t_i)|H_1}(x(t_j),...,x(t_i))p(\theta=j)= \quad (6)\\ &=\sum_{j=1}^{i}f_{N(t_j,t_i)|H_1}(x(t_j),...,x(t_i))\frac{1}{i}.\end{aligned}$$

Следовательно, отношение функций правдоподобия преобразуется к виду:

$$\begin{aligned}\lambda(t_i)\ =\ &\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i}(f_{N(t_j,t_i)|H_1}(x(t_j),...,x(t_i))\times\\ &\times f_{N(t_1,t_{j-1})|H_0}(x(t_1),...,x(t_{j-1})))\times\\ &\times\frac{1}{f_{N(t_1,t_i)|H_0}(x(t_1),...,x(t_i))}.\end{aligned}$$

Учитывая независимость отсчётов процесса обновления $N(t_1,t_i)$, перепишем (6) в виде:

$$\begin{aligned}\lambda(t_i)&=\sum_{k=1}^{i}\prod_{j=k}^{i}f_{\nu_k(t_j)|H_1}(x(t_j))\times\\ &\times\prod_{j=1}^{k-1}f_{\nu_k(t_j)|H_0}(x(t_j))\cdot\frac{1}{\prod_{j=1}^{i}f_{\nu_1(t_j)|H_0}(x(t_j))}=\\ &=\frac{1}{i}\sum_{k=1}^{i}\prod_{j=k}^{i}\frac{f_{\nu_k(t_j)|H_1}(x(t_j))}{f_{\nu_1(t_j)|H_0}(x(t_j))}.\end{aligned} \quad (7)$$

Каждый обновляющий процесс $\{\nu_k^1(t_j)=(\nu_k(t_j)\,|\,H_1)\}$ формируется отдельным фильтром Калмана F_k^1, настроенным в соответствии с гипотезой H_1 и подключённым в t_k-й момент времени.

Далее, обозначив в выражении (7) $\Psi_k^1(t_i)=\prod_{j=k}^{i}\frac{f_{\nu_k(t_j)|H_1}(x(t_j))}{f_{\nu_1(t_j)|H_0}(x(t_j))}$, получим требуемое соотношение (4). Теорема доказана.

Таким образом, решающее правило (3) и выражения (4) позволяют обнаружить конкретное нарушение. Верхний A и нижний B критические пороги определяются выражениями $A=(1-\beta)/\alpha$ и $B=\beta/(1-\alpha)$, где α и β – вероятности ошибок первого и второго рода.

Теперь рассмотрим способы получения величины $\Psi_k^1(t_i)$ и построим эффективные алгоритмы её вычисления на основе фильтров двух типов: последовательного ковариационного фильтра Калмана и информационного квадратно-корневого фильтра.

3. Эффективный алгоритм вычисления отношения правдоподобия на основе последовательного ковариационного фильтра Калмана.

Пусть данные, необходимые для вычисления соотношений (4), снимаются с источника **CF=**$\{CF_1^0, CF_k^1\,|\,k=1,...,N\}$, представляющего собой множество ковариационных фильтров Калмана, где каждый из фильтров определяется известными уравнениями [9].

Учитывая тот факт, что каждый случайный вектор $v_k(t_j)$ нормально распределён с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $\Sigma_k(t_j)$, вычисляемой фильтром Калмана, и выполнив несложные алгебраические преобразования, перепишем выражение для $\Psi_k^1(t_i)$ в виде

$$\Psi_k^1(t_i)=\begin{cases} 1, \quad i<k \\ \Psi_k^1(t_{i-1})\sqrt{\dfrac{\left|\Sigma_k^1(t_i)\right|}{\left|\Sigma_1^0(t_i)\right|}}\times \\ \times\exp\left[\dfrac{(v_1^0(t_i))^T(\Sigma_1^0(t_i))^{-1}v_1^0(t_i)}{2}- \right. \\ \left. -\dfrac{(v_k^1(t_i))^T(\Sigma_k^1(t_i))^{-1}v_k^1(t_i)}{2}\right], i\ge k. \end{cases} \tag{8}$$

Таким образом, получена удобная рекуррентная формула для вычисления отношения правдоподобия $\lambda(t_i)$ в решающем правиле (3).

Теперь рассмотрим более подробно выражение (8). Здесь в каждый момент времени t_i требуется вычислять детерминант ковариационной матрицы $\Sigma(t_i)$ и величину квадратичной формы $v^T(t_i)\Sigma^{-1}(t_i)v(t_i)$, что приводит к дополнительным вычислительным затратам (наряду с вычислениями в фильтрах), а обращение матрицы $\Sigma(t_i)$ может привести к ошибкам машинного округления.

Чтобы избавиться от этих недостатков, построим эффективный алгоритм, который позволяет вычислять величины $\left|\Sigma(t_i)\right|$ и $v^T(t_i)\Sigma^{-1}(t_i)v(t_i)$ непосредственно в терминах величин, генерируемых фильтром Калмана.

В работе [10] показано, что искомые величины можно получать непосредственно в последовательном ковариационном алгоритме Калмана без применения сложных операций обращения матрицы и вычисления определителя. Алгоритм выглядит следующим образом.

Пусть матрица $H(t_i)$ представлена совокупностью своих строк, а вектор $z(t_i)$ – множеством своих элементов. Тогда величины $\ln\left|\Sigma(t_i)\right|$ и $v^T(t_i)\Sigma^{-1}(t_i)v(t_i)$ могут быть вычислены с помощью скалярной обработки измерений в фильтре Калмана по следующему алгоритму.

I. Положить

$\hat{x}_i^0=\hat{x}(t_i^-)$; $P_i^0=P(t_i^-)$; $\delta_i^0=0$; $\Delta_i^0=0$;

II. Для j=1,…,m вычислить

$$\begin{aligned}
\alpha_j &= \left(h_i^{(j)}\right)^T P_i^{(j-1)}h_i^{(j)}+r_j;\\
K_i^{(j)} &= \frac{P_i^{(j-1)}h_i^{(j)}}{\alpha_j};\\
P_i^{(j)} &= P_i^{(j-1)}-K_i^{(j)}\left(h_i^{(j)}\right)^T P_i^{(j-1)};\\
v_i^{(j)} &= z_i^{(j)}-\left(h_i^{(j)}\right)^T\hat{x}_i^{(j-1)};\\
\hat{x}_i^{(j)} &= \hat{x}_i^{(j-1)}+K_i^{(j)}v_i^{(j)};\\
\Delta_i^{(j)} &= \Delta_i^{(j-1)}+\frac{\left(v_i^{(j)}\right)^2}{\alpha_j};\\
\delta_i^{(j)} &= \delta_i^{(j-1)}+\ln\alpha_j;
\end{aligned} \tag{9}$$

III. Выдать результат

$$v^T(t_i)\Sigma^{-1}(t_i)v(t_i)=\Delta_i^{(m)}=\Delta(t_i);$$
$$\ln\left|\Sigma(t_i)\right|=\delta_i^{(m)}=\delta(t_i).$$

IV. Конец.

Замечание 1. Для применения этого алгоритма требуется, чтобы ковариация шума в измерителе $R_p(t_i)=diag\{r_1,r_2,...,r_m\}$ была диагональной матрицей. Для выполнения этого условия достаточно с помощью невырожденного преобразования декоррелировать измерения в системе (1), (2).

С учётом алгоритма (9) перепишем (8) в следующем виде:

$$\Psi_k^1(t_i)=\begin{cases}1, \quad i<k\\ \Psi_k^1(t_{i-1})\exp\left[\dfrac{\delta_k^1(t_i)-\delta_1^0(t_i)}{2}+\right.\\ \left.+\dfrac{\Delta_1^0(t_i)-\Delta_k^1(t_i)}{2}\right], i\ge k.\end{cases} \quad (10)$$

Утверждение 1.

Пусть **CSF**$=\{CSF_1^0, CSF_k^1 \mid k=1,...,N\}$ – источник данных, необходимый для вычисления отношения правдоподобия (4), содержит конечное множество ковариационных последовательных фильтров Калмана. Тогда функции $\Psi_k^1(t_i)$ можно вычислять с помощью рекуррентных соотношений (10).

Таким образом, выражения (4), (9) и (10) вместе с решающим правилом (3) составляют эффективный в вычислительном плане метод обнаружения конкретного нарушения в системе (1), (2).

4. Эффективный алгоритм вычисления отношения правдоподобия на основе квадратно-корневого информационного фильтра.

Рассмотрим теперь другой подход к вычислению отношения правдоподобия (4). Пусть данные, необходимые для вычисления соотношения (4), снимаются с источника **SRIF**$=\{SRIF_1^0, SRIF_k^1 \mid k=1,...,N\}$, представляющего собой конечное множество квадратно-корневых информационных фильтров, где каждый из фильтров определяется известными уравнениями [9]. Обратимся снова к величинам $|\Sigma(t_i)|$ и $\nu^T(t_i)\Sigma^{-1}(t_i)\nu(t_i)$. Воспользуемся результатом работы [11], в которой искомые величины также получаются непосредственно в терминах квадратно-корневого информационного фильтра.

Запишем этап обработки измерений для SRIF (Square Root Information Filter). (Здесь также действует замечание 1):

$$T_i\begin{bmatrix}\hat{R}(t_i^-) & \hat{z}(t_i^-)\\ H(t_i) & z(t_i)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{R}(t_i^+) & \hat{z}(t_i^+)\\ 0 & e(t_i)\end{bmatrix}, \quad (11)$$

где T_i – ортогональная матрицы, $\hat{R}(t_i^+)$ – верхняя треугольная матрица, $\hat{z}(t_i^\pm)=\hat{R}(t_i^\pm)\hat{x}(t_i^\pm)$, $P(t_i^\pm)=\hat{R}^{-1}(t_i^\pm)\hat{R}^{-T}(t_i^\pm)$.

Тогда $\|e(t_i)\|^2=\nu^T(t_i)\Sigma^{-1}(t_i)\nu(t_i)$ и $\ln\left|\hat{R}(t_i^+)\right|-\ln\left|\hat{R}(t_i^-)\right|=\frac{1}{2}\ln|\Sigma(t_i)|$. Поскольку матрицы $\hat{R}(t_i^\pm)$ – верхние треугольные, то $\left|\hat{R}(t_i^\pm)\right|$ равен произведению диагональных элементов.

Далее после несложных алгебраических преобразований перепишем (8) в виде

$$\Psi_k^1(t_i)=\begin{cases}1, \quad i<k\\ \Psi_k^1(t_{i-1})\dfrac{\left|\hat{R}_k^1(t_i^+)\right|\cdot\left|\hat{R}^0(t_i^-)\right|}{\left|\hat{R}_k^1(t_i^-)\right|\cdot\left|\hat{R}^0(t_i^+)\right|}\times\\ \times\exp\dfrac{1}{2}\left(\left\|e^0(t_i)\right\|^2-\left\|e_k^1(t_i)\right\|^2\right), \ i\ge k\end{cases} \quad (12)$$

Утверждение 2.

Пусть **SRIF**$=\{SRIF_1^0, SRIF_k^1 \mid k=1,...,N\}$ – источник данных, необходимый для вычисления отношения правдоподобия (4), содержит конечное множество квадратно-корневых информационных фильтров. Тогда функции $\Psi_k^1(t_i)$ можно вычислять с помощью рекуррентных соотношений (12).

Таким образом, выражения (4), (11) и (12) вместе с решающим правилом (3) составляют эффективный в вычислительном плане метод обнаружения конкретного нарушения в системе (1), (2).

5. Обнаружение и идентификация характера происходящих в системе изменений.

Рассмотрим общий случай, когда возможно M различных переходов, каждый из которых заканчивается установлением нового локально стационарного режима, однозначно задаваемого новым набором матриц-параметров $\Phi_l(t_{i+1},t_i)$, $B_l(t_i)$, $\Gamma_l(t_i)$, $H_l(t_i)$, l=1,…,M.

Распространим полученное правило обнаружения факта нарушения на задачу обнаружения и идентификации характера происходящих в системе (1), (2) изменений. Вводя дополнительные альтернативные гипотезы H_l, предполагающие функционирование системы в l-ом (l=1,…,M) режиме, и учитывая приведённые выше рассуждения, получим M функций отношения правдоподобия, определяемых следующим образом.

Теорема 2. Пусть момент появления возможного нарушения в системе (1), (2) представляет собой дискретную случайную величину θ, равномерно распределённую на отрезке $[0,i]$, и в результате нарушения система переходит с номинального режима, характеризующегося гипотезой H_0, на новый локально стационарный режим, характеризующийся гипотезой H_l, l=1,…,M. Тогда решение задачи обнаружения и идентификации характера происходящих в системе (1), (2) изменений состоит в применении в каждый момент времени t_i, (i=1,…,N) решающего правила следующего вида:

$$\begin{cases} 1. & \text{Если } \forall l\ \lambda_l(t_i) \le B, \text{ тест прекращают} \\ & \text{с выбором гипотезы } \mathrm{H}_0; \\ 2. & \text{Если } \exists j: \quad \forall l \ne j\ \lambda_j(t_i) \ge A \text{ и } \lambda_l(t_i) \le B, \\ & \text{тест прекращают с выбором } \mathrm{H}_j; \\ 3. & \text{Если } \forall l: \quad B < \lambda_l(t_i) < A, \quad \text{тест} \\ & \text{продолжают для } (i+1)-\text{го шага}; \\ 4. & \text{Если } \exists j,n: \quad \lambda_n(t_i) \ge A \text{ и } \lambda_j(t_i) \ge A, \\ & \text{тест прекращают с выбором } \mathrm{H}_q, \\ & \text{где } q = \max(j,n), \end{cases} \tag{13}$$

где

$$\lambda_l(t_i) = \frac{1}{i}\sum_{k=1}^{i} \Psi_k^l(t_i), \ l = 1,...,M, \tag{14}$$

а функции $\Psi_k^l(t_i)$ $(l = 1,...,M)$ в зависимости от типа источника данных **DS** определяются выражениями:

1) если

DS=CSF=$\{CSF_1^0, CSF_k^l \mid k = 1,...,N, l = 1,...,M\}$,

тогда

$$\Psi_k^l(t_i) = \begin{cases} 1, \quad i < k \\ \Psi_k^l(t_{i-1})\exp\frac{1}{2}\Big(\delta_k^l(t_i) - \delta_1^0(t_i) + \\ \quad + \Delta_1^0(t_i) - \Delta_k^l(t_i)\Big), \ i \ge k. \end{cases} \tag{15}$$

2) если

DS=SRIF=$\{SRIF_1^0, SRIF_k^l \mid k = 1,...,N, l = 1,...,M\}$,

тогда

$$\Psi_k^l(t_i) = \begin{cases} 1, \quad i < k \\ \Psi_k^l(t_{i-1})\dfrac{\left|\hat{R}_k^l(t_i^+)\right| \cdot \left|\hat{R}^0(t_i^-)\right|}{\left|\hat{R}_k^l(t_i^-)\right| \cdot \left|\hat{R}^0(t_i^+)\right|} \times \\ \times \exp\dfrac{1}{2}\left(\left\|e^0(t_i)\right\|^2 - \left\|e_k^l(t_i)\right\|^2\right), \ i \ge k. \end{cases} \tag{16}$$

Доказательство. Рассмотрим вместо одного альтернативного режима функционирования системы (1), (2) M альтернативных режимов, каждому из которых соответствует гипотеза

H_l={ $\Phi(t_{i+1},t_i) = \Phi_l(t_{i+1},t_i)$,

$B(t_i) = B_l(t_i)$, $\Gamma(t_i) = \Gamma_l(t_i)$, $H(t_i) = H_l(t_i)$ },

$l = 1,...,M$.

Тогда по теореме 1 получим выражение (15), причём для $l = 1,...,M$

$$\Psi_k^l(t_i) = \prod_{j=k}^{i} \frac{f_{\nu_k(t_j)|\mathrm{H}_l}(x(t_j))}{f_{\nu_1(t_j)|\mathrm{H}_0}(x(t_j))}.$$

Далее, пользуясь результатами предложений 1 и 2, получим выражения (15) и (16). Отметим, что выбор гипотезы в пункте 4 решающего правила (13) соответствует критерию максимального правдоподобия и не требует дополнительного обоснования.

Теорема доказана.

6. Пример.

В качестве примера рассмотрим систему второго порядка, заданную уравнениями:

$$\begin{bmatrix} x(t_{i+1}) \\ v_x(t_{i+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t_i) \\ v_x(t_i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_x(t_i) \\ w_{v_x}(t_i) \end{bmatrix}, \qquad (17)$$

$$z(t_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t_i) \\ v_x(t_i) \end{bmatrix} + v(t_i), \qquad (18)$$

где τ – интервал между поступлениями двух очередных измерений, вектор состояния объекта содержит два компонента – координату $x(t_i)$ и скорость $v_x(t_i)$, $w(t_i) = \begin{bmatrix} w_x(t_i) & w_{v_x}(t_i) \end{bmatrix}^T$ и $v(t_i)$ – независимые нормально распределенные векторы шумов с нулевыми математическими ожиданиями и ковариациями $Q = \dfrac{\sigma^2}{6} \begin{bmatrix} 2\tau^3 & 3\tau^2 \\ 3\tau^2 & 6\tau \end{bmatrix}$ и $R = \rho$. Под нарушением в данном случае понимаем очередной манёвр объекта. Множество моделей, характеризующих вид нарушения, различаются значением параметра σ. Основному режиму функционирования соответствует значение σ=1.

Рассмотрим решение задачи обнаружения факта нарушения в модели (17), (18) в случае, когда момент возникновения нарушения t_{01} априорно неизвестен. Для этого используем решающее правило (3), вычисляя в каждый момент времени t_i значение функции отношения правдоподобия по формулам (4), (10). Проведём вычислительные эксперименты, соответствующие двум случаям: **S1** – нарушение не происходит, **S2** – нарушение произошло. Условия проведения эксперимента приведены в табл. 1.

Основным результатом здесь можно считать практическое подтверждение работоспособности предложенного метода на примере обнаружения манёвра движущегося объекта.

7. Заключение.

В работе получен метод гарантированного по вероятностям ошибок первого и второго рода обнаружения и идентификации нарушений в классе линейных стохастических систем управления в процессе фильтрации. В случае *M* возможных режимов функционирования системы решение принимается на ограниченном множестве, содержащем *M* значений функции отношения правдоподобия.

Данный метод отличается ещё и тем, что все величины, необходимые для вычисления отношения правдоподобия, получаются непосредственно в процессе фильтрации без применения сложных в вычислительном плане (особенно для систем большой размерности) операций обращения и вычисления детерминанта квадратной матрицы. Более того, последовательный ковариационный фильтр Калмана может быть легко заменен на устойчивые к ошибкам округления последовательные ковариационные алгоритмы (Поттера, Бирмана, Карлсона) [10].

Предполагается, что дальнейшее исследование будет направлено на изучение практической реализации данного метода, в частности, на разработку алгоритмов диагностики нарушений с применением технологий параллельного программирования.

Таблица 1. Условия проведения экспериментов

N эксперимента	S1	S2
Параметры системы	$x(t_0)$~$N(0.5,1)$, $v_x(t_0)$~$N(0.2,1)$, τ=0.5, ρ=0.1, σ_0=1, σ_1=4, α=β=0.05	
Действительное значение параметра σ до 25-й итерации	$\sigma=\sigma_0$	$\sigma=\sigma_0$
Действительное значение параметра σ после 25-й итерации	$\sigma=\sigma_0$	$\sigma=\sigma_1$
Момент принятия решения	27	28
Выбранная гипотеза	H_0	H_1

Библиографический список

1. Page, E. S. Continuous inspection schemes / E. S. Page // Biometrica. – 1954. – Vol. 41, № 2. – P. 100-114.

2. Ширяев, А. Н. Статистический последовательный анализ / А. Н. Ширяев. – М.: Наука, 1976.

3. Бассвиль, М. И. Обнаружение изменения свойств сигналов и динамических систем / под. ред. М. И. Бассвиль, А. В. Банвенист. – М.: Мир, 1989.

4. Fault diagnosis in dynamic systems. Theory and Applications / eds. by R. Patton [et al.]. – NJ: Prentice Hall Inc. Englewood Cliffs, 1989.

5. Tse, L. L. Sequential Analisys: Some Classical Problems and New Challenges / L. L. Tse // Statistica Sinica. – 2001. – Vol. 11, № 1. – P. 303-408.

6. Семушин, И. В. Обнаружение нарушений в моделях стохастических систем / И. В. Семушин, Л. В. Калинин // Измерительная техника. – 1996. – № 3. – С. 9-11.

7. Семушин, И. В. Обнаружение нарушений на основе уравнений чувствительности фильтра Калмана / И. В. Семушин, А. Г. Сковиков, Л. В. Калинин // Измерительная техника. – 1997. – № 9. – С. 19-21.

8. Вальд, А. Последовательный анализ / А. Вальд. – М.: Физматгиз, 1960.

9. Grewal, M. S. Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB, Second Edition / M. S. Grewal, A. P. Andrews. – John Wiley&Sons, Inc., 2001.

10. Semoushin, I. V. An Efficient Way to Evaluate Likelihood Functions in Terms of Kalman Filter Variables / I. V. Semoushin, J. V. Tsyganova // Adaptive, Cooperative and Competitive Processes in Systems Modelling, Design and Analysis / eds. Alexandru Murgu and George E. Lasker. – The International Institute for Advanced Studies in Systems Research & Cybernetics: University of Windsor, Windsor, Ontario, Canada, 2001. – P. 67-74.

11. Maximum Likelihood Estimation Using Square Root Information Filters / G. J. Bierman [et al.] // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1990. – Vol. 35, № 12. P. 1293-1298.

References

1. Page, E. S. Continuous inspection schemes / E. S. Page // Biometrica. - 1954. - Vol. 41, № 2. - P. 100-114.

2. Shiryaev, A. N. Statistical sequential analysis / A. N. Shiryaev. - Moscow: Nauka, 1976.

3. Bassville, M. I. Detection of changes in signal properties and dynamic systems / Edited by M. I. Bassville, A. V. Banvenist. - Moscow: Mir, 1989.

4. Fault diagnosis in dynamic systems. Theory and Applications / eds. by R. Patton [et al.]. - NJ: Prentice Hall Inc. Englewood Cliffs, 1989.

5. Tse, L. L. Sequential Analisys: Some Classical Problems and New Challenges / L. L. Tse // Statistica Sinica. - 2001. - Vol. 11, № 1. - P. 303-408.

6. Semoushin, I. V. Fault detection in models of stochastic systems / I. V. Semoushin, L. V. Kalinin // Izmeritel'naya technika (Measuring equipment). - 1996. - No. 3, p. 9-11.

7. Semoushin, I. V. Fault detection on the basis of Kalman filter sensitivity equations / I. V. Semoushin, A. G. Skovikov, L. V. Kalinin // Izmeritel'naya technical (Measuring equipment). - 1997. - No 9. p. 19-21.

8. Vald, A. Sequential analysis / A. Vald. - Moscow: Physmatgiz, 1960.

9. Grewal, M. S. Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB, Second Edition / M. S. Grewal, A. P. Andrews. - John Wiley&Sons, Inc., 2001.

10. Semoushin, I. V. An Efficient Way to Evaluate Likelihood Functions in Terms of Kalman Filter Variables / I. V. Semoushin, J. V. Tsyganova / / Adaptive, Cooperative and Competitive Processes in Systems Modelling, Design and Analysis / eds. Alexandru Murgu and George E. Lasker. - The International Institute for Advanced Studies in Systems Research & Cybernetics: University of Windsor, Windsor, Ontario, Canada, 2001. - P. 67-74.

11. Maximum Likelihood Estimation Using Square Root Information Filters / G. J. Bierman [et al.] // IEEE Trans. Automat. Contr. - 1990. - Vol. 35, № 12. P. 1293-1298.

METHOD OF FAULT DETECTION AND DIAGNOSIS IN LINEAR STOCHASTIC SYSTEMS IN THE PROCESS OF FILTRATION

© 2009 Yu. V. Tsyganova

Ulianovsk State University

A computationally efficient method of fault detection and its identification in the class of linear stochastic control systems in the process of filtration has been obtained. The efficiency of the method lies in the fact that a decision is taken on a limited set of likelihood function values, the values being computed directly in terms of values generated by the filter.

Linear stochastic systems, fault detection, Kalman filter, likelihood function, sequential analysis.

Информация об авторе

Цыганова Юлия Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра информационных технологий, Ульяновский государственный университет; e-mail: tsyganovajv@mail.ru. Область научных интересов: методы обнаружения нарушений, идентификации и адаптивной фильтрации в динамических системах.

Tsyganova, Julia Vladimirovna, candidate of physical and mathematical science, associate professor of the department of information technologies, Ulianovsk State University; e-mail: tsyganovajv@mail.ru. Area of research: methods of fault detection, identification and adaptive filtration in dynamic systems.